Zadaci:

1. a) Izračunati $\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}:\frac{9}{5}\right):1\frac{7}{30}\right)^{-2}+\log_2 0{,}0625.$

   b) Uprostiti $\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y\cdot(x-y)^2}{x^4-y^4}.$

2. Riješiti jednačine:

   a) $\frac{2x+1}{5}-\frac{x+2}{4}=\frac{5x+2}{3}-2x$

   b) $(f(x))^2+f(x)=0,$ ako je $f(x)=\begin{Bmatrix} x+1, & x<2 \\ x-1, & x\geq 2\end{Bmatrix}.$

3. Riješiti trigonometrijsku jednačinu: $\cos^2 x-3\sin x\cos x=-1$.

4. Riješiti nejednačinu: $x^{\log_2^2 x-3\log_2 x+1}<8$.

5. Izračunati obim i površinu jednakokrakog trapeza opisanog oko kruga, ako je dužina veće osnovice 3 cm, a jedan njegov unutrašnji ugao 60°.

6. Zbir svih članova beskonačne geometrijske progresije je 16, a zbir kvadrata članova te iste progresije je 153,6. Nađi peti član i količnik te progresije.

7. Izračunati $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 80^\circ$.

Rješenja:

1. a)

$$\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}:\frac{9}{5}\right):1\frac{7}{30}\right)^{-2}+\log_2 0{,}0625=$$

$$=\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}:\frac{9}{5}\right)\cdot\frac{30}{37}\right)^{-2}+\log_2(0{,}25)^2=\left(\frac{12+25}{60}\cdot\frac{30}{37}\right)^{-2}+2\cdot\log_2 0{,}5^2=$$

$$=\left(\frac{37}{60}\cdot\frac{30}{37}\right)^{-2}+2\cdot 2\log_2 2^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+4\cdot(-1)=4-4=0.$$

b)

$$\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y\cdot(x-y)^2}{x^4-y^4}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y\cdot(x-y)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}=$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y\cdot(x-y)}{(x+y)(x^2+y^2)}=$$

$$=\frac{x(x+y)-y(x-y)}{(x+y)(x^2+y^2)}=\frac{x^2+xy-xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}=\frac{1}{x+y},$$

uz uslov $x \neq -y \wedge x \neq y$.

2. a) Ako se data jednačina pomnoži sa NZS (3,4,5), tj. sa 60, dobija se:

$$\frac{2x+1}{5}-\frac{x+2}{4}=\frac{5x+2}{3}-2x \Leftrightarrow 12(2x+1)-15(x+2)=20(5x+2)-120x$$

$$\Leftrightarrow 9x-18=-20x+40$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

b) Ako je $x < 2$, jednačina glasi $(x+1)^2+(x+1)=0.$ Tada je:

$$(x+1)^2+(x+1)=0 \wedge x<2 \Leftrightarrow x^2+3x+1=0 \wedge x<2$$

$$\Leftrightarrow (x=-1 \vee x=-2) \wedge x<2$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=-2$$

Ako je $x \geq 2$, jednačina glasi $(x-1)^2+x-1=0.$ Tada je:

$$(x-1)^2+(x-1)=0 \wedge x \geq 2 \Leftrightarrow x^2-x=0 \wedge x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=1) \wedge x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x \in \Theta \text{ (nema rješenja).}$$

Rješenja jednačine su: $x = -1$ ili $x = -2$.

3.) Za $\cos x = 0$ ili $\sin x = 0$, tj. za $x = k\cdot\frac{\pi}{2}, k \in Z$ jednačina je nemoguća.

Dalje, data jednačina je ekvivalentna sa :

$$\cos^2 x - 3\sin x\cos x = -1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x + 1 - 3\sin x\cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - 3\sin x\cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \sin^2 x - 3\sin x\cos x = 0$$
(dijeljenje m sa $\cos^2 x \neq 0$)
$$\Leftrightarrow 2 + tg^2 x - 3tgx = 0$$
$$\Leftrightarrow tgx = t \;\wedge\; t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow tgx = t \;\wedge (\mathrm{t} = 2 \vee \mathrm{t} = 1)$$
$$\Leftrightarrow tgx = 2 \vee tgx = 1$$
$$\Leftrightarrow x = arctg 2 + k\pi,\ k \in Z \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{4} + l\pi,\ l \in Z.$$

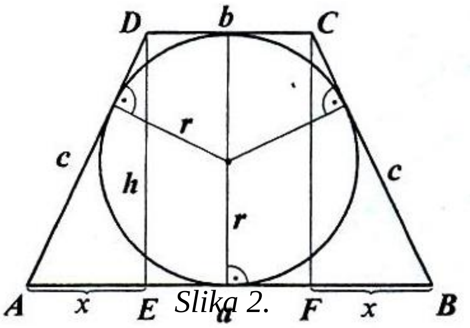
4.) Nejednačina $x^{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 1} < 8$ ima smisla za x > 0. Ako uvedemo smjenu $\log_2 x = t$, onda je $x = 2^t$, pa dobijamo:

$$\left(2^t\right)^{t^2 - 3t + 1} < 8$$
$$\Leftrightarrow 2^{t^3 - 3t^2 + t} < 2^3$$
$$\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + t < 3$$
$$\Leftrightarrow t^2(t-3) + (t-3) < 0$$
$$\Leftrightarrow (t-3)\cdot\left(t^2 + 1\right) < 0$$
$$\Leftrightarrow t < 3$$

Prema tome, $\log_2 x < 3$, tj. $\log_2 x < \log_2 2^3$, odakle slijedi da je x < 8 i kako je x > 0, skup rješenja nejednačine je interval (0,8).

5.) Neka je E podnožje visine h iz tjemena D (Slika 2). Tada je AE = x i $c \cdot \cos 60^\circ = \frac{c}{2}$

Trapez je jednakokraki, pa je $x = \frac{a-b}{2}$, odnosno $\frac{c}{2} = \frac{a-b}{2}$, a kako je trapez tangentni to je $2c = a + b$.



Slika 2.

Dakle, $2c = a + b,\ \frac{c}{2} = \frac{a-b}{2}$ i a = 3, odakle je

$$\left.\begin{array}{l} 2c = 3 + b \\ c = 3 - b \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 6 - 2b = 3 + b \\ c = 3 - b \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3 = 3b \\ c = 3 - b \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} b = 1 \\ c = 2 \end{array}\right\}.$$

Visinu h dobijamo iz pravouglog trougla AED:

$h = c\cdot\sin 60^\circ = \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$

To znači da je obim trapeza $O = 2c + a + b = 2\cdot 2 + 3 + 1 = 8\ cm,$

a površina trapeza je $P = \frac{a+b}{2}\cdot h = \frac{3+1}{2}\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ cm^2.$

6.) Prema uslovu zadatka je $a_1 + a_1\cdot q + a_1\cdot q^2 + ... = 16$ i $|q| < 1$, jer progresija ima sumu. Kvadrati članova geometrijske progresije obrazuju, takođe geometrijsku progresiju sa količnikom q^2, $0 < q^2 < 1$ i prvim članom a_1^2 za koju je
$a_1^2 + a_1^2 q^2 + a_1^2 q^4 + ... = 153{,}6.$

Zbir svih članova progresije izračunava se po formuli
$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, pa iz $\frac{a_1}{1-q} = 16$ i $\frac{a_1^2}{1-q^2} = 153{,}6$ slijedi :

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 16\cdot(1-q) \\ \frac{256\cdot(1-q)^2}{1-q^2} &= 153{,}6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= 16\cdot(1-q) \\ 256\cdot(1-q) &= 153{,}6\cdot(1+q) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= 16\cdot(1-q) \\ 102{,}4 &= 409{,}6\cdot q \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= 12 \\ q &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right\}.$$

Dakle, $q = \frac{1}{4}$ i $a_5 = a_1\cdot q^4 = 12\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{12}{256} = \frac{3}{64}.$

7.) Znajući da je $\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$ i $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, dobijamo da je

$$\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 80^\circ = \frac{\sin 40^\circ}{2\cdot\sin 20^\circ}\cdot\frac{\sin 80^\circ}{2\cdot\sin 40^\circ}\cdot\frac{\sin 120^\circ}{2\cdot\sin 60^\circ}\cdot\frac{\sin 160^\circ}{2\cdot\sin 80^\circ} =$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin 120^\circ}{\sin 60^\circ}\cdot\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin(180^\circ - 60^\circ)}{\sin 60^\circ}\cdot\frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{16}.$$

Zadaci:

1.) a) Izračunati $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\frac{1}{\sqrt{6}+11}$.

b) Uprostiti $\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{a^2-ab}$.

2.) Riješiti jednačine: a) $\frac{x-1}{2}+\frac{3x-1}{4}=\frac{2x-4}{3}+\frac{x+1}{6}$,

b) $\left(x^2-4x\right)^2+12=7\left(4x-x^2\right)$.

3.) Riješiti trigonometrijsku jednačinu: $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}$.

4.) Riješiti nejednačinu: $\log_3(3-x)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{4}$.

5.) Odrediti dužine stranica trougla, ako se zna da one obrazuju aritmetičku progresiju sa razlikom d = 4 i ako jedan unutrašnji ugao trougla ima 120º.

Rješenja:

1. a)

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\frac{1}{\sqrt{6}+11}=$$
$$=\left(\frac{15\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1}+\frac{4\cdot\left(\sqrt{6}+2\right)}{6-4}-\frac{12\cdot\left(3+\sqrt{6}\right)}{9-6}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$
$$=\left[3\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)+2\cdot\left(\sqrt{6}+2\right)-4\left(3+\sqrt{6}\right)\right]\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$
$$=\left(\sqrt{6}-11\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=6-121=-115.$$

b)

$$\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{a^2-ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{b\cdot(a-b)}+\frac{b^2}{a\cdot(a-b)}=$$
$$=\frac{\left(a^2+b^2\right)(a-b)-a^3+b^3}{ab\cdot(a-b)}=\frac{a_3+ab^2-a^2b-b^3-a^3+b^3}{ab\cdot(a-b)}=$$
$$=\frac{ab\cdot(b-a)}{ab\cdot(a-b)}=-1,\ \text{ uz uslov } a\neq 0,\ b\neq 0 \text{ i } a\neq b.$$

2. a) Ako datu jednačinu pomnožimo sa NZS (2,3,4,6), tj. sa 12, dobijamo:

$$\frac{x-1}{2}+\frac{3x-1}{4}=\frac{2x-4}{3}+\frac{x+1}{6} \Leftrightarrow 6\cdot(x-1)+3\cdot(3x-1)=4\cdot(2x-4)+2\cdot(x+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 15x-9=10x-14 \Leftrightarrow 5x=-5 \Leftrightarrow x=-1.$$

b) Ako uvedemo smjenu $x^2-4x=t$, dobijamo da je:

$$\left(x^2-4x\right)^2+12=7\cdot\left(4x-x^2\right) \Leftrightarrow x^2-4x=t \wedge t^2+7t+12=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x=t \wedge (t=-3 \vee t=-4) \Leftrightarrow x^2-4x=-3 \vee x^2-4x=-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \vee x^2-4x+4 \Leftrightarrow x=3 \vee x=1 \vee x=2.$$

3.) Koristeći identitete:

$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$,

$a^4-a^2b^2+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-3a^2b^2$,

$2\sin x\cos x=\sin 2x$ i

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$,

transformišemo lijevu stranu jednačine na sledeći način:

$$\cos^6 x+\sin^6 x=\left(\cos^2 x\right)^3+\left(\sin^2 x\right)^3=$$
$$=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x-\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x\right)=$$
$$=1\cdot\left[\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-3\cos^2 x\sin^2 x\right]=1-3\cdot\frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{4}=$$
$$1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\left(1-\cos^2 2x\right).$$

Data jednačina sada ima oblik $1-\frac{3}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}$, odakle se sređivanjem dobija ekvivalentna jednačina, odnosno $2\cos^2 2x-5\cos 2x+2=0$. Uvođenjem smjene $\cos 2x=t$ dobija se jednačina $2t^2-5t+2=0$, čija su rješenja $t=2$ ili $t=\frac{1}{2}$. Jednačina $\cos 2x=2$ je nemoguća, a jednačina $\cos 2x=\frac{1}{2}$ ima rješenja $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z.$

4.) Nejednačina $\log_3(3-x)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{4}$ ima smisla ako je $3-x>0$ i $\frac{x+1}{4}>0$, odnosno ako je $x\in(-1,3)$. Kako je $\log_{\frac{1}{n}} a=-\log_n a$ biće da je

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{4}=-\log_3\frac{x+1}{4}=\log_3\left(\frac{x+1}{4}\right)^{-1}=\log_3\frac{4}{x+1}.$$

Osnova logaritma je veća od 1, pa je logaritamska funkcija rastuća, a nejednačina $\log_3(3-x)<\log_3\frac{4}{x+1}$ se svodi na nejednačinu $3-x<\frac{4}{x+1}.$ Odavde dobijamo da je $3-x-\frac{4}{x+1}<0$, odnosno $\frac{x^2-2x+1}{x+1}>0$ ili $\frac{(x-1)^2}{x+1}>0.$

Rješenja poslednje nejednačine su svi brojevi veći od -1 i različiti od 1. Ako uzmemo u obzir da je $x\in(-1,3)$, konačno rješenje date nejednačine je $x\in(-1,1)\cup(1,3).$

5.) Neka su stranice trougla $a, b=a-4$ i $c=a+4$. Sa slike 8. vidi se da je $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $y=\frac{a}{2}$. Prema Pitagorinoj teoremi je:

$x^2+(y+a-4)^2=(a+4)^2$ pa je $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}+a-4\right)^2=(a+4)^2$,

odakle se sređivanjem dobija jednačina $2a^2-20a=0$, čija su rješenja $a=0$ ili $a=10.$
Dakle stranice trougla su: $a=10,\ \ b=6$ i $c=14.$

Zadaci:

1.) a) Šta je veće: 13 % od 200 ili 30 % od 90?

b) Uprostiti izraz $\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^{-1}:\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^2-b^2}.$

2.) Rješiti jednačine:

a) $x-\frac{1+\frac{3}{4}x}{4}+\frac{5-\frac{2}{3}x}{4}=\frac{3-\frac{x}{2}}{3}$ b) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2\cdot|x|\right)=-1$

3.) Dokazati identitet $3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha.$

4.) Rješiti nejednačinu $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}.$

5.) Dijagonale jednakokrakog trapeza su uzajamno normalne. Izračunati njegovu površinu ako je krak $c=2\sqrt{5}\ cm$, a odnos osnovica je 3:1.

6.) Deveti član aritmetičke progresije je pet puta veći od drugog člana, a pri dijeljenju trinaestog člana sa šestim članom dobija se količnik 2 i ostatak 5. O kojoj progresiji je riječ?

7.) Skicirati grafike funkcija:

a) $y = 2|\sin x|$; b) $y = \cos\frac{x}{2}$; c) $y = \log_2 2x$; d) $y = \frac{1}{|x|}$.

Rješenja:

1. a) $200 \cdot \frac{13}{100} = 26 < 27 = 90 \cdot \frac{30}{100}$.

b)

$$\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}} \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^{-1} : \frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^2-b^2} = \frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \frac{ab}{a^2+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} =$$

$$= \frac{\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}}{\frac{a+b}{ab}} \cdot \frac{ab}{a^2+b^2} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{\frac{b-a}{ab}} = \frac{b^2+a^2}{ab(a+b)} \cdot \frac{ab}{a^2+b^2} \cdot \frac{(a-b)(a+b)\cdot ab}{-(a-b)} = -ab$$

uz uslov $ab \neq 0,\ \ a \neq -b,\ a \neq b.$

2. a) Ako jednačinu $x - \frac{1+\frac{3}{4}x}{4} + \frac{5-\frac{2}{3}x}{4} = \frac{3-\frac{x}{2}}{3}$ pomnožimo sa NZS (3,4), tj, sa 12, dobijamo ekvivalentnu jednačinu $12x - 3\left(1+\frac{3}{4}x\right) + 3\left(5-\frac{2}{3}x\right) - 4\left(3-\frac{x}{2}\right) = 0$ odakle sređivanjem dobijamo da je $\frac{39}{4}x = 0$, odnosno da je $x = 0$.

b) Jednačina ima smisla za $x^2 + 2|x| > 0$, tj. za $x \neq 0$ i kako je

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \text{ biće } \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2|x|\right) = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2|x| = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x-3=0 \wedge x>0\right) \vee \left(x^2-2x-3=0 \wedge x<0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x=1 \vee x=-3) \wedge x>0\right) \vee \left((x=3 \vee x=-1) \wedge x<0\right) \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1.$$

3.) Koristeći formule:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$a^4 + b^4 = \left(a^2+b^2\right)^2 - 2a^2b^2, \text{ dobijamo da je}$$

$$\begin{aligned}
&3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = \\
&= 3 + 4\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha \\
&= 3 + 4\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)^2 - \left(2\sin\alpha\cos\alpha\right)^2 \\
&= 3\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + 4\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + \cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\
&= 7\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\
&= 7\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\
&= 7\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\
&= 8\cos^2\alpha - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\
&= 8\cos^2\alpha\cdot\left(1 - \sin^2\alpha\right) \\
&= 8\cos^2\alpha\cos^2\alpha \\
&= 8\cos^4\alpha.
\end{aligned}$$

4.) Zadatak ima smisla, ako je $x \neq -1$. Tada je:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^{x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right)^{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^{x} \Leftrightarrow$$

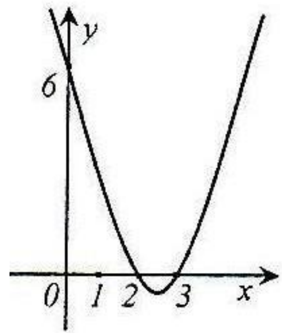
(osnova eksponencijalne funkcije je >1)

$$\Leftrightarrow \frac{6x-6}{x+1} \leq x \Leftrightarrow \frac{6x-6-x^2-x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+3)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

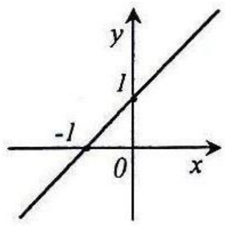
(vidjeti slike 12. i 13. i tablicu)

$$\Leftrightarrow x \in (-1,2] \cup [3,+\infty).$$



Slika 12.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,3)$	$(3,+\infty)$
x^2-5x+6	+	+	-	+
$x+1$	-	+	+	+
$\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}$	-	+	-	+

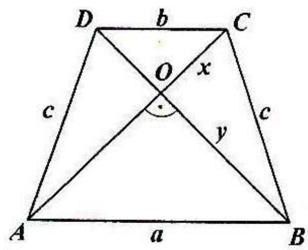


Slika 13.

5.) Trouglovi *ABO* i *CDO* su slični, jer su im odgovarajući uglovi jednaki, pa su im parovi odgovarajućih stranica proporcionalni. Kako je *AB:CD* = *OB:OC*, tj. *3:1*= *OB:OC*, biće *OB* = *3OC*. Označimo duž *OB, OC* i *BC* redom sa *y*, *x* i *c*. (Slika 14.).
Trougao *BOC* je pravougli, pa je:

$$c^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^2=x^2+(3x)^2 \Leftrightarrow x^2=2$$

iz čega slijedi da je $x=\sqrt{2}$.



Slika 14.

Dijagonale jednakokrakog trapeza su uzajamno normalne i jednake, pa ako označimo dijagonale *AC* i *BD* sa d, slijedi da je:

$$P_{ABCD}=\frac{d^2}{2}=\frac{(x+y)^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)^2}{2}=\frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2}=16\ cm^2.$$

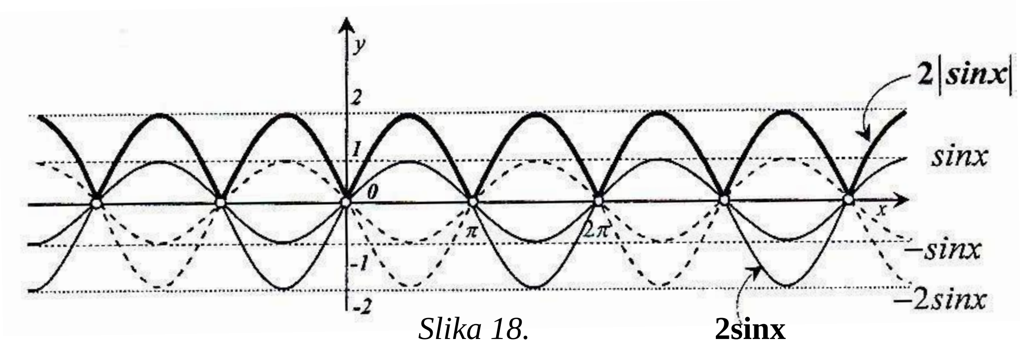
6.) Neka je a_1 prvi član, a d razlika date aritmetičke progresije.
Prema uslovu zadatka slijedi da je:

$$\left.\begin{array}{l} a_9=5\cdot a_2 \\ a_{13}=2\cdot a_6+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1+8d=5\cdot(a_1+d) \\ a_1+12d=2a_1+10d+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3d=4a_1 \\ 2d-5=a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3d=4\cdot(2d-5) \\ a_1=2d-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d=4 \\ a_1=3 \end{array}\right\}.$$

Prvih nekoliko članova progresije je : 3, 7, 11, 15, 19,... .

7. a) $y = 2\cdot|\sin x| = \begin{cases} 2\cdot\sin x, & \sin x \geq 0 \\ -2\cdot\sin x, & \sin x < 0 \end{cases}$

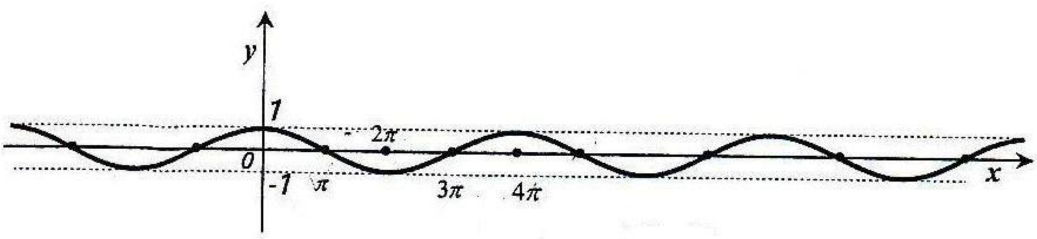


Slika 18.

b) Osnovni period funkcije $y = \cos\frac{x}{2}$ je $T = \frac{2\pi}{\varpi} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	π
y	1	0	-1	0	1

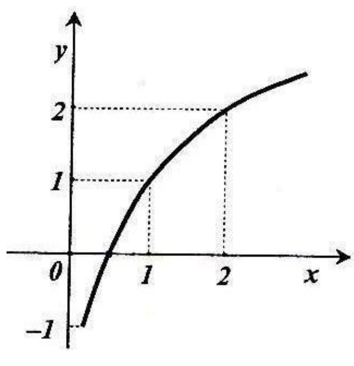
Grafik funkcije prikazan je na slici 19.



Slika 19.

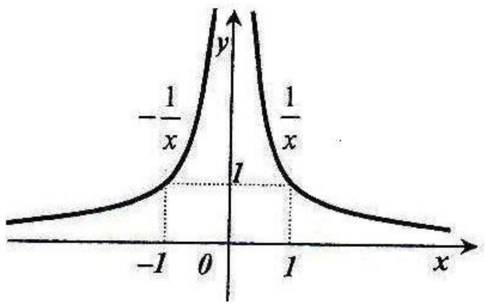
c) $y = \log_2 2x, \quad x > 0$

x	1/4	1/2	1	2	4
y	-1	0	1	2	3



Slika 20.

d) $$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$



Slika 21.

Zadaci:

1. a) Izračunati: $2^{2^{-2}} : 2^{-2^{-2}}$.

   b) Za a = 0,003 i b = 5,994 odrediti vrijednost izraza
   $$I(a,b) = \left(\frac{1}{a-3b} - \frac{1}{a+3b} + \frac{6b}{a^2 - 9b^2} \right) : \frac{b \cdot (2a+b)}{a^2 - 9b^2}.$$

2.) Rješiti jednačine

   a) $\dfrac{2x+1}{7} - \dfrac{3x-2}{3} = \dfrac{4x+5}{21} - \dfrac{1}{3}$;

   b) $(f(x))^2 + f(x) = 0$ ako je $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x \geq 1 \\ x-1, & x < 1 \end{cases}$.

3.) Rješiti trigonometrijsku jednačinu $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1$.

4.) U trouglu ABC je $BC = 5$, $AC = 8$, $\angle BAC = 30^\circ$ i $\angle ABC < 90^\circ$. Odrediti AB.

5.) Rješiti sistem jednačina $\left. \begin{aligned} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 - y = 2 \end{aligned} \right\}.$

Rješenja:

1. a) $2^{2^{-2}} : 2^{-2^{-2}} = 2^{\frac{1}{4}} : 2^{-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$

   b)

$$I(a,b)=\left(\frac{1}{a-3b}-\frac{1}{a+3b}+\frac{6b}{a^2-9b^2}\right):\frac{b\cdot(2a+b)}{a^2-9b^2}=\frac{a+3b-(a-3b)+6b}{a^2-9b^2}\cdot\frac{a^2-9b^2}{b\cdot(2a+b)}=$$

$$=\frac{12b}{b(2a+b)}=\frac{12}{2a+b},\quad a\neq-\frac{b}{2},\quad b\neq 0.$$

$$I(0{,}003\,;5{,}994)=\frac{12}{2\cdot 0{,}003+5{,}994}=\frac{12}{6}=2.$$

2. a) Ako jednačinu $\frac{2x+1}{7}-\frac{3x-2}{3}=\frac{4x+5}{21}-\frac{1}{3}$ pomnožimo sa NZS (7,3), tj. sa 21 dobijamo ekvivalentnu jednačinu $3\cdot(2x+1)-7\cdot(3x-2)=4x+5-7$, koja se sređivanjem svodi na jednačinu $-19x+19=0$, a njeno rješenje je $x=1$.

b) 1° Za $x\geq 1$, je $f(x)=\log_2 x$.

$$\log_2^2 x+\log_2 x=0 \Leftrightarrow \log_2 x(\log_2 x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x=0\vee \log_2 x=-1$$
$$\Leftrightarrow x=1\vee x=\frac{1}{2},$$

pa je, zbog uslova $x\geq 1$, jedino rješenje ove jednačine $x=1$.

2° Za $x<1$, je $f(x)=x-1$

$$(x-1)^2+(x-1)=0\Leftrightarrow (x-1)((x-1)+1)=0$$
$$\Leftrightarrow x-1=0\vee x=0$$
$$\Leftrightarrow x=1\vee x=0,$$

pa je zbog uslova $x<1$, jedino rješenje ove jednačine je $x=0$.
Dakle, skup rješenja date jednačine je $\{0,1\}$.

3.) Koristeći identitete:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

dobija se:

$$\sin^2 2x+\sin^2 3x=1 \Leftrightarrow \frac{1-coc4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x+\cos 6x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 5x\cdot\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x=0 \vee \cos x=0$$

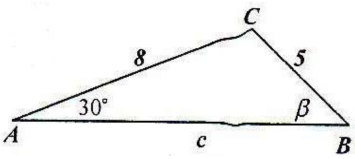
$$\Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k\in Z \vee x=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ \ l\in Z$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5},\ \ k\in Z \vee x=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ \ l\in Z.$$

4.) Na osnovu sinusne teoreme važi $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$, tj. $\dfrac{5}{\frac{1}{2}}=\dfrac{8}{\sin\beta}$ (Slika 23.).

Na osnovu implikacije

$$\sin\beta=\frac{4}{5}\wedge 0<\beta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \cos\beta=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$$



Slika 23.

i na osnovu kosinusne teoreme važi

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta, \text{ odnosno } 64=25+c^2-2\cdot 5\cdot c\cdot\frac{3}{5},$$

odakle je $c^2-6c-39=0$.

Rješavanjem kvadratne jednačine i uzimajući u obzir da je $c>0$ proističe da je $c=3+4\sqrt{3}$.

5.) Sistem ima smisla za $x>0,\ y>0,\ x\neq 1$ i $y\neq 1$.

$$\left.\begin{aligned}\log_y x+\log_x y=2\\ x^2-y=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}\log_y x+\frac{1}{\log_y x}=2\\ x^2-2=y\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}\log_y^2 x+1=2\log_y x\\ x^2-2=y\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}\left(\log_y x-1\right)^2=0\\ x^2-2=y\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}\log_y x=1\\ x^2-2=y\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}x=y\\ x^2-x-2=0\end{aligned}\right\}.$$

Iz druge jednačine se dobije da je $x=2$ ili $x=-1$. Prema uslovu zadatka, jedino rješenje sistema je $x=2,\ \ y=2$.

Zadaci:

1. a) Izračunati $\sqrt{(-2)^2}+9^{-\frac{1}{2}}-81^{-2^{-2}}+3^{\frac{1}{\log_2 3}}$.

b) Uprostiti izraz $\left(3-\frac{(a+b)^2}{ab}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right):\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}$.

2) Riješiti jednačine:

a) $|3x-1|-|2-x|=1$, b) $\frac{1}{1+x+x^2+x^3+\dots}=\frac{\sqrt{4x-1}}{2}$.

3) Riješiti trigonometrijsku jednačinu $\cos 2x+\sin^2 x=\cos x$.

4) Riješiti nejednačinu $\frac{1}{x+1}>\frac{2x}{2x-1}$.

5) Treći član aritmetičke progresije je 9, a razlika između sedmog i drugog člana je 20. Koliko članova progesije treba sabrati da bi njihova suma bila 91?

6) Riješiti sistem jednačina $\left.\begin{array}{r} x+\sqrt{xy}+y=14 \\ x^2+xy+y^2=84 \end{array}\right\}$.

Rješenja:

1. a)

$$\sqrt{(-2)^2}+9^{-\frac{1}{2}}-81^{-2^{-2}}+3^{\frac{1}{\log_2 3}}=|-2|+\frac{1}{\sqrt{9}}-81^{-\frac{1}{4}}+3^{\log_3 2}=$$

$$=2+\frac{1}{3}-\left(3^4\right)^{-\frac{1}{4}}+2=2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+2=4.$$

b)

$$\left(3-\frac{(a+b)^2}{ab}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right):\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}=\frac{3ab-a^2-2ab-b^2}{ab}\cdot\frac{b^2-a^2}{ab}\cdot\frac{a^2b^2}{a^3+b^3}=$$

$$=-\frac{\left(a^2-ab+b^2\right)(b-a)(b+a)}{(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}=a-b,\ \text{uz uslov } ab\neq 0,\ a\neq -b.$$

2. a) Kako je $|3x-1| = \begin{cases} 3x-1, & x \geq \frac{1}{3} \\ -(3x-1), & x < \frac{1}{3} \end{cases}$ i $|2-x| = \begin{cases} 2-x, & x \leq 2 \\ -(2-x), & x > 2 \end{cases}$

jednačinu $|3x-1| - |2-x| = 1$, ćemo rješavati posebno u sledećim intervalima: $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right), \left[\frac{1}{3}, 2\right]$ i $(2, +\infty)$.

(1) $\left[x < \frac{1}{3} \wedge (-3x+1-2+x=1)\right] \Leftrightarrow \left[x < \frac{1}{3} \wedge 2x = -2\right] \Leftrightarrow x = -1$

(2) $\left[\frac{1}{3} \leq x \leq 2 \wedge (3x-1-2+x)=1\right] \Leftrightarrow \left[\frac{1}{3} \leq x \leq 2 \wedge 4x = 4\right] \Leftrightarrow x = 1$

(3) $\left[x > 2 \wedge (3x-1-(-2+x)=1)\right] \Leftrightarrow \left[x > 2 \wedge 2x = 0\right] \Leftrightarrow x = \Theta.$

Prema tome, skup rješenja date jednačine je $\{-1, 1\}$.

b) Kako zbir članova beskonačne geometrijske progresije postoji samo $|q| < 1$, a kvadratni korjen postoji za negativne brojeve, to će, s obzirom na to da lijeva strana ne može biti 0, jednačina $\frac{1}{1+x+x^2+x^3+\ldots} = \frac{\sqrt{4x-1}}{2}$ imati smisla za $4x-1 > 0$ i $|x| < 1$, tj. za $\frac{1}{4} < x < 1$.

Kako je $q = x$ pozitivno to će biti $S_\infty = \frac{1}{1-x}$, pa važi:

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+\ldots} = \frac{\sqrt{4x-1}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = \frac{\sqrt{4x-1}}{2} \Rightarrow 4\cdot(1-x)^2 = 4x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \vee x = \frac{1}{2}.$$

Prema uslovu zadatka, rješenje jednačine je samo $x = \frac{1}{2}$.

3.)

$$\cos 2x + \sin^2 x = \cos x \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = \cos x$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = 1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in Z \ \vee \ \ x = 2l\pi,\ l \in Z.$$

4.) Nejednačina $\frac{1}{x+1} > \frac{2x}{2x-1}$ ima smisla za $x \neq -1$ i $x \neq \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{x+1} > \frac{2x}{2x-1} \Rightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{2x-1} > 0 \Rightarrow \frac{-2x^2-1}{(x+1)(2x-1)} > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-(2x^2+1)}{(x+1)(2x-1)} > 0 \Rightarrow (x+1)(2x-1) < 0 \Rightarrow x \in \left(-1, \frac{1}{2}.\right)$$

5.) Zbir prvih n članova aritmetičke progresije izračunava se po formuli $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)\cdot d],\ \ n \in N.$

Kako je po uslovu zadatka:

$$\left.\begin{aligned} a_7 - a_2 &= 20 \\ a_3 &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 + 6d - a_1 - d &= 20 \\ a_1 + 2d &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 5d &= 20 \\ a_1 + 2d &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} d &= 4 \\ a_1 &= 1 \end{aligned}\right\},$$

to je $91 = \frac{n}{2}[2\cdot 1 + (n-1)\cdot 4]$, odnosno $2n^2 - n - 91 = 0$.

Rješenja jednačine su $n = 7$ ili $n = -\frac{27}{4}$. Dakle, treba uzeti 7 članova progresije da bi njihov zbir bio 91.

6.) Sistem ima smisla za $xy \geq 0$.
Kako je

$$(14 - x - y)^2 = 14^2 + x^2 + y^2 - 2\cdot 14\cdot x - 2\cdot 14\cdot y + 2xy =$$
$$= 196 + x^2 + y^2 - 28x - 28y + 2xy,$$

to je

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{xy}=14-x-y\\ x^2+xy+y^2=84\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}xy=196+x^2+y^2-28x-28y+2xy\\ x^2+xy+y^2=84\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x^2+xy+y^2=28\cdot(x+y)-196\\ x^2+xy+y^2=84\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}28\cdot(x+y)=196+84\\ x^2+xy+y^2=84\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y=10\\ x^2+xy+y^2=84\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=10-y\\ (10-y)^2+y^2+(10-y)\cdot y=84\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=10-y\\ y^2-10y+16=0\end{array}\right\}.$$

Rješavanjem druge jednačine sistema dobijamo da je $y=8$ ili $y=2.$
Skup rješenja sistema je $\{(8,2),(2,8)\}.$

2. Način

Kako je $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy,$ to će dati sistem biti ekvivalentan sistemu:

$$\left.\begin{array}{l}x+y+\sqrt{xy}=14\\ (x+y)^2-xy=84\end{array}\right\}.$$

Uvođenjem smjene $a=x+y,\ b=\sqrt{xy}$ dobija se da je

$$\left.\begin{array}{l}a+b=14\\ a^2-b^2=84\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a+b=14\\ (a-b)(a+b)=84\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a+b=14\\ a-b=6\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=10\\ b=4\end{array}\right\}.$$

Prelaskom na stare promjenjive, jednostavno se dolazi do rješenja sistema.