ЗАДАЦИ ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Задатке припремила: Наташа Павловић

САДРЖАЈ

1. ТРАНСФОРМАЦИЈА ИЗРАЗА

1. Упростити израз

$$\frac{ab^{-2}\left(a^{-1}b^{2}\right)^{4}\left(ab^{-1}\right)^{2}}{a^{-2}b\left(a^{2}b^{-1}\right)^{3}a^{-1}b},$$

а затим одредити вриједност израза за *a*=10^{-3} и *b*= -10^{-2}.

Рјешење:

Дати израз је дефинисан за $a\neq 0$ и $b\neq 0$.

$$\frac{ab^{-2}a^{-4}b^{8}a^{2}b^{-2}}{a^{-2}ba^{6}b^{-3}a^{-1}b}=\frac{a^{-1}b^{4}}{a^{3}b^{-1}}=\frac{b^{5}}{a^{4}}\quad .$$

За a=10^{-3} и b=-10^{-2} вриједност израза је

$$\frac{\left(-10^{-2}\right)^{5}}{\left(10^{-3}\right)^{4}}=\frac{-10^{-10}}{10^{-12}}=-100\ .$$

2. Одредити вриједност разломка

$$\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}\ .$$

Рјешење:

$$\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^{3}}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2}}-\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}=2-1=1.$$

3. Поједноставити сљедећи израз

$$\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}$$

ако је $x=2mn/(n^2+1)$, $m>1$ и $0<n<1$.

Рјешење:

$$\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}\cdot\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}=\frac{m+x+2\sqrt{m^{2}-x^{2}}+m-x}{m+x-m+x}=\frac{2m+2\sqrt{m^{2}-x^{2}}}{2x}=\frac{m+\sqrt{m^{2}-x^{2}}}{x}.$$

Ако у овај израз уврстимо $x=2mn/(n^2+1)$, тада добијамо сљедећи израз:

$$\frac{m+\sqrt{m^2-\dfrac{4m^2n^2}{\left(n^2+1\right)^2}}}{\dfrac{2mn}{n^2+1}}=\frac{m\left(n^2+1\right)+\sqrt{m^2n^4+2m^2n^2+m^2-4m^2n^2}}{2mn}=$$

$$=\frac{m\left(n^2+1\right)+\sqrt{m^2\left(n^2-1\right)^2}}{2mn}=\frac{m\left(n^2+1\right)+\left|m\left(n^2-1\right)\right|}{2mn}.$$

За $m>1$ и $0<n<1$ имамо да је $m(n^2-1)<0$, па горњи израз добија облик:

$$\frac{m\left(n^2+1\right)-m\left(n^2-1\right)}{2mn}=\frac{1}{n}.$$

4. Да ли је исправна пропорција

$$\frac{6acm^2-18acm}{4a^2m^4-108a^2m}:\frac{15ac^2m+45ac^2}{24a^3m+72a^3}=\frac{4a^2b^2cm-12a^2b^2c}{3b^2c^3m-9b^2c^3}:\frac{5ab^2m^4-135ab^2m}{9b^2cm^2-27b^2cm}\ ?$$

Рјешење:

$$\frac{6acm(m-3)}{4a^2m\left(m^3-27\right)}:\frac{15ac^2(m+3)}{24a^3(m+3)}=\frac{4a^2b^2c(m-3)}{3b^2c^3(m-3)}:\frac{5ab^2m\left(m^3-27\right)}{9b^2cm(m-3)}$$

$$\frac{3c}{2a\left(m^2+3m+9\right)}:\frac{5c^2}{8a^2}=\frac{4a^2}{3c^2}:\frac{5a\left(m^2+3m+9\right)}{9c}$$

$$\frac{3c}{2a\left(m^2+3m+9\right)}\cdot\frac{5a\left(m^2+3m+9\right)}{9c}=\frac{5c^2}{8a^2}\cdot\frac{4a^2}{3c^2}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$$

Пропорција је исправна.

5. Упростити израз

$$\sqrt[4]{1+2x+x^2}\sqrt{\frac{x^4+x^5}{x^2-1}}\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}.$$

Рјешење:

Израз је дефинисан за $x\neq 0$ и $x\neq\pm 1$.

$$\sqrt[4]{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x^4(x+1)}{x^2-1}}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^4}}=\sqrt[4]{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x^4(x+1)}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^4}}=$$

$$=\sqrt[4]{(x+1)^2}\sqrt{x+1}=\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$$

6. Упростити израз

$$\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}\ .$$

Рјешење:

$$\frac{\left(x+2+\sqrt{x^2-4}\right)^2}{(x+2)^2-x^2+4}+\frac{\left(x+2-\sqrt{x^2-4}\right)^2}{(x+2)^2-x^2+4}=$$

$$\frac{(x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x^2-4}+x^2-4}{4x+8}+\frac{(x+2)^2-2(x+2)\sqrt{x^2-4}+x^2-4}{4x+8}$$

$$=\frac{2x^2+8x+8+2x^2-8}{4x+8}=x.$$

7. Упростити израз

$$\frac{\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}}\ ,\ (x=\sqrt{ab}\ ,a>0,\ b>0\ )\ .$$

Рјешење:

$$\frac{\left(\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}\right)^2}{(a+x)(x+b)-(a-x)(x-b)}=\frac{2ax+2bx+2\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}{2ab+2x^2}$$

$$=\frac{ax+bx+\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}{ab+x^2}$$

Уврстимо $x=\sqrt{ab}$

$$\frac{a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}+\sqrt{(a^2-ab)(ab-b^2)}}{ab+ab}=\frac{\sqrt{ab}(a+b)+\sqrt{ab}|a-b|}{2ab}$$

$1^\bullet$ $a-b>0 \Rightarrow a>b$

$$\frac{\sqrt{ab}(a+b)+\sqrt{ab}(a-b)}{2ab}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

$2^\bullet$ $a-b<0 \Rightarrow a<b$

$$\frac{\sqrt{ab}(a+b-a+b)}{2ab}=\frac{\sqrt{ab}}{a}$$

$3^\bullet$ $a=b \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a^2}\,2a}{2a^2}=1$

8. Упростити израз

$$\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}, \quad \left(x=\left[\frac{p^2+q^2}{2pq}\right]^{\frac{1}{2}}\ ,\ p>q\ ,\ pq\neq 0\right).$$

Рјешење:

$$\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}\right]^{-2}=\left[\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}\right]^2=\left[\frac{2x^2-2\sqrt{x^4-1}}{-2}\right]^2=\left(x^2-\sqrt{x^4-1}\right)^2$$

$$=2x^4-2x^2\sqrt{x^4-1}-1$$

$$=2\left[\left(\frac{p^2+q^2}{2pq}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^4-2\left[\left(\frac{p^2+q^2}{2pq}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\sqrt{\left[\left(\frac{p^2+q^2}{2pq}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^4-1}-1$$

$$=\frac{\left(p^2+q^2\right)^2}{2p^2q^2}-\frac{\left(p^2+q^2\right)}{pq}\sqrt{\frac{\left(p^2-q^2\right)^2}{4p^2q^2}}-1$$

$$=\frac{\left(p^2+q^2\right)^2}{2p^2q^2}-\frac{\left(p^2+q^2\right)\left(p^2-q^2\right)}{2p^2q^2}-1=\frac{q^2}{p^2}.$$

9. Трансформисати сљедећи израз

$$\frac{a^2-1}{n^2+an}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}.$$

Рјешење:

$$\frac{a^2-1}{n^2+an}\left(\frac{n}{n-1}-1\right)\cdot\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}=\frac{a^2-1}{n^2+an}\cdot\frac{n-n+1}{n-1}\cdot\frac{-a+an^3+n^4-n}{a^2-1}=$$

$$\frac{-(a+n)+n^3(a+n)}{n(n+a)(n-1)}=\frac{(a+n)\left(n^3-1\right)}{n(a+n)(n-1)}=\frac{n^2+n+1}{n}.$$

10. Упростити израз:

$$\left[x-\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}+\frac{3}{x^2-x+1}\right)\left(x-\frac{2x-1}{x+1}\right)\right]\left(x^2+x+1\right).$$

Рјешење:

$$\left(x-\frac{x^2-x+1-3+3x+3}{x^3+1}\cdot\frac{x^2+x-2x+1}{x+1}\right)\left(x^2+x+1\right)=\left(x-\frac{x^2+2x+1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}\cdot\frac{x^2-x+1}{x+1}\right)\left(x^2+x+1\right)$$
$$=(x-1)\left(x^2+x+1\right)=x^3-1.$$

11. Упростити израз

$$\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)\cdot\frac{x^4-2x^3+8x-16}{4}-2x\,.$$

Рјешење:

$$\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x^3(x-2)+8(x-2)}{4}-2x=\frac{4}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x-2)\left(x^3+8\right)}{4}-2x$$
$$=\frac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{x+2}-2x=x^2-2x+4-2x=(x-2)^2.$$

12. Упростити израз

$$\frac{2a}{a^2-4x^2}+\frac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot\left(x+\frac{3x+6}{x+2}\right)$$

Рјешење:

$$\frac{2a}{a^2-4x^2}+\frac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot\left(x+\frac{3x+6}{x+2}\right)=$$
$$\frac{2a}{(a-2x)(a+2x)}+\frac{1}{2x(x+3)-a(x+3)}\cdot\left(x+\frac{3(x+2)}{x+2}\right)=$$
$$\frac{2a}{(a-2x)(a+2x)}+\frac{1}{(x+3)(2x-a)}\cdot(x+3)=$$
$$\frac{2a}{(a-2x)(a+2x)}-\frac{1}{a-2x}=\frac{2a-a-2x}{(a-2x)(a+2x)}=\frac{1}{a+2x}$$

за $x\neq -a/2$.

13. Упростити израз

$$\left(\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a}{4-a^2}-\frac{2}{a+2}\right)\frac{a^3-2a^2-4a+8}{a^2-1}.$$

Рјешење:

$$\left(\frac{a}{(a-2)^2}+\frac{a}{a^2-4}-\frac{2}{a+2}\right)\cdot\frac{a^2(a-2)-4(a-2)}{a^2-1}=\frac{a(a+2)+a(a-2)+2(a-2)^2}{(a-2)(a^2-4)}\cdot\frac{(a-2)(a^2-4)}{a^2-1}$$

$$=\frac{4(a^2-a+1)}{a^2-1}=\frac{4(a-1)}{a+1}$$

За $a\neq -1$.

2. ЈЕДНАЧИНЕ, НЕЈЕДНАЧИНЕ И СИСТЕМИ

1. Ријешити једначину:

$$\frac{1}{nx-n^2}-\frac{1}{mn-mx}=\frac{1}{mn-nx}-\frac{1}{mx-m^2}.$$

Рјешење:

Једначина је дефинисана за $m,n\neq 0 \wedge x\neq m \wedge x\neq n$.

$$\frac{1}{n(x-n)}-\frac{1}{m(n-x)}=\frac{1}{n(m-x)}-\frac{1}{m(x-m)}$$

$$\frac{m+n}{mn(x-n)}=\frac{m+n}{nm(m-x)}$$

$$x-n=m-x \Rightarrow x=\frac{m+n}{2}$$

2. Ријешити једначину

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{4}{x+1}\left(\frac{1}{x-1}+1\right).$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $x\neq\pm1$, тј. $\forall x\in R\backslash\{-1,1\}$.

$$\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{x^2-1}=\frac{4}{x+1}\cdot\frac{1+x-1}{x-1}$$

$$\frac{4x}{x^2-1}=\frac{4x}{x^2-1}$$

$$4x=4x$$

Рјешење је $\forall x\in R\backslash\{-1,1\}$, тј. једначина је неодређена.

3. Ријешити једначину

$$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}=\frac{7}{12}.$$

Рјешење:

Дефиницион о подручје : $\frac{x+2}{2x+2}>0 \Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$

Уводимо смјену $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}=t$.

$$t-\frac{1}{t}=\frac{7}{12}$$

$$12t^2-7t-12=0$$

$$t_{1,2}=\frac{7\pm25}{24}$$

$$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}=\frac{4}{3}$$

$$18x+18=16x+32$$

$$x=7$$

$$t_1=\frac{4}{3}$$

$$t_2=-\frac{3}{4}\left(\text{Како је } t=\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}>0, \text{ рјешење } t_2 \text{ отпада.}\right)$$

4. За које α из скупа реалних бројева рјешења квадратне једначине $2x^2-\alpha x+6=0$ су:

а) реална и различита,

б) реална и једнака,

в) комплексна?

Рјешење:

Дискриминанта једначине је $D=\alpha^2-48$.

а) $D>0 \Rightarrow \alpha^2-48>0 \Rightarrow (\alpha-4\sqrt{3})(\alpha+4\sqrt{3}) \Rightarrow \alpha \in (-\infty,-4\sqrt{3}) \cup (4\sqrt{3},+\infty)$

б) $D=0 \Rightarrow \alpha^2-48=0 \Rightarrow \alpha=\pm 4\sqrt{3}$

в) $D<0 \Rightarrow \alpha^2-48<0 \Rightarrow \alpha \in (-4\sqrt{3},4\sqrt{3})$

5. Одредити све вриједности параметра m за које је квадратни трином $mx^2-4mx+m^2+2m-3$ позитиван за све вриједности промјенљиве x.

Рјешење:

Знамо да је $ax^2+bx+c>0$ за $\forall x\in R$ ако су задовољени услови да је $a>0$ и $D<0$.

$D=16m^2-4m(m^2-2m-3)=-4m^3+8m^2+12m<0$

$-4m(m^2-2m-3)<0$

Из услова $a>0$ слиједи $m>0$, а то значи да је $m^2-2m-3>0$.

$m^2-2m-3>0$

$(m+1)(m-3)>0 \Rightarrow m\in(-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$

Због $m>0$ слиједи да је рјешење $m\in(3,+\infty)$.

6. Дата је једначина $x^2-2(a+1)x+3a+2=0$. Дискутовати реалност рјешења.

Рјешење:

$D=4(a+1)^2-4(3a+2)=4a^2-4a-4=4(a^2-a-1)$

$D=0 \Rightarrow a_{1,2}\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, рјешења реална и једнака.

$D>0 \Rightarrow a\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$, у том случају су рјешења реална и различита.

7. Дата је једначина $7(m+x)-11=m^2-4+3(x+1)$. Одредити параметар m тако да рјешење дате једначине буде негативно.

Рјешење:

$7m+7x-11=m^2-4+3x+3$
$4x= m^2-7m+10$
$x=(m^2-7m+10)/4$
За $x<0 \Rightarrow m^2-7m+10<0 \Rightarrow (m-2)(m-5) <0$. Рјешење једначине је $m\in(2,5)$.

8. За које вриједности једначина $x^4(a+3)-4ax^2+(1-a)=0(1)$ нема реална рјешења?

Рјешење:

Смјена: $x^2=t$
$t^2(a+3)-4at+1-a=0$ (2)
Једначина нема реална рјешења ако је $D<0$.
$D=16a^2-4(a+3)(1-a)= 20a^2+8a-12<0 \Rightarrow a\in(-1,3/5)$.
Сада одредимо оне вриједности a за које су оба рјешења t_1 и t_2 једначине (2) негативна (да једначина (1) не би имала реална рјешења). Ако су t_1, $t_2<0$, према Виетовим формулама је:
$t_1 + t_2=4a/(a+3) <0 \wedge t_1t_2=(1-a)/(a+3)>0$.
$4a/(a+3) <0 \Rightarrow a\in(-3,0)$
$(1-a)/(a+3)>0 \Rightarrow a\in(-3,1)$
Рјешење је $a\in(-3,0)$, што заједно са $a\in(-1,3/5)$ даје $a\in(-3,3/5)$.

9. Дата је једначина $x^2+4tx-4(t+1)=0$. Наћи све вриједности параметра t за које ова једначина има реална рјешења.

Рјешење:

$D\geq0$
$D=16t^2+16(t+1) \Rightarrow t^2+t+1\geq0$, а то је позитивно $\forall t\in$R.

10. Дата је једначина $x^2+4tx+2(t+1)=0$. Наћи све вриједности параметра t за које ова једначина има реална рјешења.

Рјешење:

$D\geq0$
$D=16t^2-8(t+1) \Rightarrow 2t^2-t-1\geq0$
$t_1=1$, $t_2= -1/2$
Рјешење је: $t\in(-\infty,-1/2]\cup[1,+\infty)$.

11. Одредити све вриједности параметра *p*, тако да коријени једначине x^2-3*px*+p^2=0 задовољавају услов

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{7}{4}.$$

Рјешење:

По Виетовим формулама, за једначину $ax^2+bx+c=0$ важи $x_1+x_2=-b/a$, $x_1x_2=c/a$.
У нашем случају је $x_1+x_2=3p$, $x_1x_2=p^2$.
Одавде ће бити :

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{7}{4}$$
$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = \frac{7}{4}$$
$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{7}{4}$$

$$(3p)^2 - 2p^2 = \frac{7}{4}$$
$$7p^2 = \frac{7}{4}$$
$$p^2 = 1/4 \Rightarrow p_1 = 1/2,\ p_2 = -1/2$$

12. Ријешити једначину

$$\frac{(a-x)^3 + (b-x)^3}{(a-x)^2 - (b-x)^2} = a - b\ .$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $(a\text{-}x)^2 \neq (b\text{-}x)^2 \Leftrightarrow a\text{-}x \neq b\text{-}x \wedge a\text{-}x \neq b+x \Rightarrow a \neq b \wedge x \neq (a+b)/2$.

$$\frac{(a-x+b-x)\left[(a-x)^2 - (a-x)(b-x) + (b-x)^2\right]}{(a-x+b-x)(a-x-b+x)} = a-b$$
$$a^2 - 2ax + x^2 - ab + ax + bx - x^2 + b^2 - 2bx + x^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2} = \frac{a+b \pm |a-b|}{2}$$

$1^\circ\ a-b>0$
$$x_1 = a$$
$$x_2 = b$$

$2^\circ\ a-b<0$
$$x_1 = b$$
$$x_2 = a$$

13. Наћи све вриједности параметра *t* за које је неједначина

$$\frac{1}{(t+1)x^2 + 4tx + t - 3} < 0$$

задовољена за свако реално *x*.

Рјешење:

$$(t+1)x^2 + 4tx + t - 3 < 0$$
$$t+1 < 0 \wedge D = 16t^2 - 4(t+1)(t-3) < 0$$
$$3t^2 + 2t + 3 < 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-32}}{6} - \text{нема реалне нуле} \Rightarrow 3t^2 + 2t + 3 > 0,\quad \forall t \in R$$

Не постоји $t \in \mathrm{R}$ тако да је неједначина задовољена $\forall x \in \mathrm{R}$.

14. За коју вриједност параметра $k \in$ R је задовољена неједначина $kx^2+3kx+k+2>0$, $\forall x \in$ R?

Рјешење:

$$k > 0 \wedge D < 0$$
$$D = b^2 - 4ac = k(5k - 8)$$
$$\text{Kako je } k > 0 \Rightarrow 5k - 8 < 0 \Rightarrow k \in \left[0, \frac{8}{5}\right)$$

15. За које вриједности параметра $m \in$ R важи неједнакост

$$\frac{-3}{mx^2 + 2mx - m^2 + 2} < 0 \ , \forall x \in \mathbf{R} \ ?$$

Рјешење:

$$mx^2 + 2mx - m^2 + 2 > 0$$
$$m > 0 \ \wedge \ D < 0$$
$$\text{Kako je } m > 0 \ \Rightarrow \ m^2 + m - 2 < 0$$
$$m \in (-2, 1)$$
$$D = 4m(m^2 + m - 2)$$

Рјешење је $m \in [0,1)$.

16. За коју вриједност параметра $k \in R$ важи неједначина

$$\frac{-2}{kx^2 + 2kx - k^2 + 2} > 0, \quad \forall x \in R \ ?$$

Рјешење:

$$kx^2 + 2kx - k^2 + 2 < 0 \Rightarrow k < 0 \wedge D < 0$$
$$D = 4k^2 - 4k(-k^2 + 2) = 4k(k^2 + k - 2) < 0 \Rightarrow k^2 + k - 2 > 0$$
$$k_1 = 1, k_2 = -2 \Rightarrow k \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$
$$\text{због } k < 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -2)$$

17. За које m је тачна неједначина

$$mx^2-2mx+m^2-2<0?$$

Рјешење:

$$m \leq 0 \ \wedge D<0$$
$$D=4m^2-4m(m^2-2)=4m(m-m^2+2)<0$$

Како је $m<0 \ \Rightarrow \ -m^2+m+2>0$

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$
$$m_1 = -1, m_2 = 2$$
$$m \in (-1, 2)$$

Рјешење је $m \in (-1, 0]$.

18. Наћи сва рјешења једначине

$$x|x-4|=3(x-2),\quad x\in \mathbf{R}.$$

Рјешење:

а) $x-4\geq 0 \Rightarrow x\in[4,+\infty)$

$x^2-4x=3x-6$

$x^2-7x+6=0$

$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\frac{7\pm 5}{2}$

$x_1=6,\quad x_2=1$

б) $x-4<0 \Rightarrow x\in(-\infty,4)$

$-x^2+4x=3x-6$

$-x^2+x+6=0$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-2}=\frac{-1\pm 5}{-2}$

$x_1=-2,\quad x_2=3$

Рјешења једначине су: x= -2, x=3, x=6.

19. Риjешити неједначину

$$|x+1|-|x-2|<3,\quad x\in \boldsymbol{R}.$$

Рјешење:

	(-∞, -1)	(-1, 2)	(2, +∞)
x+1	-	+	+
x-2	-	-	+

На основу табеле имамо сљедеће:

а) $x\in(-\infty,-1]$

$-x-1+x-2<3$

$-3<3$

$R_1: x\in(-\infty,-1]$

б) $x\in(-1,2]$

$x+1+x-2<3$

$x<2$

$R_2: x\in(-1,2)$

в) $x\in(2,+\infty)$

$x+1-x+2<3$

$3<3$

Рјешење је $x\in(-\infty,2)$.

20. Риjешити неједначину

$$|x+2|-|x-1|<x-\frac{3}{2},\quad x\in \boldsymbol{R}.$$

Рјешење:

	(-∞, -2)	(-2, 1)	(1, +∞)
x+2	-	+	+
x-1	-	-	+

а) $x \in (-\infty,-2]$

$-x-2+x-1<x-\frac{3}{2}$

$x>-\frac{3}{2}$

$R_1:(-\infty,-2]\cap\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)=\varnothing$

б) $x \in (-2,1]$

$x+2+x-1<x-\frac{3}{2}$

$x<-\frac{5}{2}$

$R_2:(-2,1]\cap\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)=\varnothing$

в) $x \in (1,+\infty)$

$x+2-x+1<x-\frac{3}{2}$

$x>\frac{9}{2}$

$R_3:(1,+\infty)\cap\left(\frac{9}{2},+\infty\right)=\left(\frac{9}{2},+\infty\right)$

Рјешење је $x\in(9/2,+\infty)$.

21.Ријешити неједначину

$$\left|\frac{x+4}{3x+2}\right|>\frac{1}{x}.$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $3x+2\neq0 \wedge x\neq0$, тј. $x\in(-\infty,-2/3)\cup(-2/3,0)\cup(0,+\infty)$.

	(-∞, -4)	(-4, -2/3)	(-2/3, +∞)
$x+4$	-	+	+
$3x+2$	-	-	+
	+	-	+

а) $x \in (-\infty,-4]$

$$\frac{x+4}{3x+2}>\frac{1}{x}$$

$$\frac{x+4}{3x+2}-\frac{1}{x}>0$$

$$\frac{x^2+x-2}{x(3x+2)}>0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x(3x+2)}>0$$

Види табелу 1.

б) $x \in \left(-4,-\frac{2}{3}\right)$

$$-\frac{x+4}{3x+2}>\frac{1}{x}$$

$$-\frac{x+4}{3x+2}-\frac{1}{x}>0$$

$$\frac{x^2-7x+2}{x(3x+2)}<0$$

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{41}}{2} \Rightarrow x_1=\frac{-7+\sqrt{41}}{2},\ x_2=\frac{-7-\sqrt{41}}{2}$$

Види табелу 2.

Табела 1

	(-∞, -2)	(-2, -2/3)	(-2/3, 0)	(0, 1)	(1, +∞)
$x+2$	-	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	+
x	-	-	-	+	+
$3x+2$	-	-	+	+	+
k	+	-	+	-	+

S: $x\in(-\infty,-2] \cup (-2/3,0) \cup [1,+\infty)$

R_1 : $(-\infty,-4] \cap S= (-\infty,-4]$

Табела 2

	x_2		-2/3	x_1	0
x	-	-	-	-	+
$3x+2$	-	-	+	+	+
$x-x_1$	-	-	-	+	+
$x-x_2$	-	+	+	+	+
k	+	-	+	-	+

$$A: x \in \left(\frac{-7-\sqrt{41}}{2}, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{-7+\sqrt{41}}{2}, 0\right)$$

$$R_2 : \left(-4, -\frac{2}{3}\right) \cap A = \left(-4, -\frac{2}{3}\right)$$

в) $x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$

$$\frac{x+4}{3x+2} > \frac{1}{x}$$

$$B: x \in (-\infty, -2] \cup \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \cup [1, +\infty)$$

$$R_3 : x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right) \cap B = \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \cup (1, +\infty)$$

Укупно рјешење је: $R_1 \cup R_2 \cup R_3 = (-\infty, -2/3) \cup (-2/3, 0) \cup (1, +\infty)$.
Рјешење је $x \in (-\infty, 2)$.

22. Ријешити неједначину

$$|x-1| + |x+3| \leq 4.$$

Рјешење:

	-3	1	
$x-1$	-	-	+
$x+3$	-	+	+

а) $x \in (-\infty, -3]$

$-x+1-x-3 \leq 4$

$x \geq -3$

$R_1 : x = -3$

б) $x \in (-3, 1)$

$-x+1+x+3 \leq 4$

$4 \leq 4$

$R_2 : x \in (-3, 1)$

в) $x \in [1, +\infty)$

$x-1+x+3 \leq 4$

$x \leq 1$

$R_3 : x = 1$

Коначно рјешење је $x \in [-3, 1]$.

23. За које $x\in R$ важи сљедећа неједнакост

$$|x^2-1|< 3\ ?$$

Рјешење:

$-3<x^2-1<3$

а) $x^2-1>-3$
$x^2+2>0$
$R_1 : \forall x\in R$

б) $x^2-1<3$
$(x-2)(x+2)<0$
$R_2: x\in(-2,2)$

Коначно рјешење је $R=R_1\cap R_2 \Rightarrow x\in(-2,2)$.

24. Риjешити систем једначина

$$\sqrt{x+3y+1}=2$$
$$\sqrt{2x-y+2}=7y-6\ .$$

Рјешење:

$$x+3y+1=4$$
$$2x-y+2=(7y-6)^2 \ \wedge 7y-6>0 \Rightarrow y>\frac{6}{7}$$
$$x+3y=3$$
$$2x-y+2=49y^2-84y+36$$
$$x=3-3y$$
$$2(3-3y)-y+2=49y^2-84y+36$$
$$49y^2-77y+28=0$$
$$7y^2-11y+4=0$$

$y_1=1$

$y_2=\frac{4}{7}$ (Како је $\frac{4}{7}<\frac{6}{7} \Rightarrow y_2$ није рјешење.)

$x_1=0$

$R:(0,1)$

25. Ријешити систем једначина

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0}$$
$$\boldsymbol{x - 3y + 1 = 0}\ .$$

Рјешење:

$$x = 3y - 1$$
$$(3y-1)^2 + y^2 + 2(3y-1) - 9 = 0$$
$$10y^2 - 10 = 0$$
$$y^2 = 1$$
$$y_1 = 1 \wedge y_2 = -1$$
$$x_1 = 2 \wedge x_2 = -4$$

Рјешења су: (2,1) и (-4,-1).

26. Наћи све вриједности $b \in \mathrm{R}$ за које реални бројеви x и y задовољавају систем једначина

$$\boldsymbol{3x+y=b}$$
$$\boldsymbol{x+2y=2b+1}$$

при чему је $x>3y$.

Рјешење:

$$\left.\begin{aligned} -6x-2y &= -2b \\ x+2y &= 2b+1 \end{aligned}\right\} +$$
$$x = -\frac{1}{5}$$
$$y = b - 3x$$
$$y = b + \frac{3}{5}$$

$$x > 3y \Rightarrow -\frac{1}{5} > 3\left(b + \frac{3}{5}\right)$$
$$-1 > 15b + 9$$
$$b < -\frac{2}{3}$$

27. Ријешити систем једначина

$$\boldsymbol{|x-y| = 4}$$
$$\boldsymbol{|x| + |y| = 4 \qquad (x, y \in \mathrm{R})}\ .$$

Рјешење:

а) $x - y \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} x-y &= 4 \\ x+y &= 4 \end{aligned}\right\} + \Rightarrow x = 4,\ y = 0$$

$R_1 : (4,0)$

б) $x - y \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge y < 0$

$$\left.\begin{aligned} x-y &= 4 \\ x-y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$\mathrm{R}_2 : \forall x, y \in \mathrm{D}_1$

D_1 је област четвртог квадранта координатног система.

в) $x - y \geq 0 \wedge x < 0 \wedge y \geq 0$

$\mathrm{R}_3 : \varnothing$

г) $x - y \geq 0 \wedge x < 0 \wedge y < 0$

$$\left.\begin{aligned} x-y &= 4 \\ -x-y &= 4 \end{aligned}\right\} + \Rightarrow x = 0,\ y = -4$$

$\mathrm{R}_4 : (0,-4)$

д) $x-y<0 \wedge x\geq 0 \wedge y\geq 0$

$$\left.\begin{array}{r} -x+y=4 \\ x+y=4 \end{array}\right\} + \Rightarrow x=0,\ y=4$$

$R_5:(0,4)$

ђ) $x-y<0 \wedge x\geq 0 \wedge y<0$

$\mathrm{R}_6:\varnothing$

е) $x-y<0 \wedge x<0 \wedge y\geq 0$

$$\left.\begin{array}{r} -x+y=4 \\ -x+y=4 \end{array}\right\}$$

$R_7:\forall x, y\in D_2$

D_2 је област другог квадранта координатн ог система.

ж) $x-y<0 \wedge x<0 \wedge y<0$

$$\left.\begin{array}{r} -x+y=4 \\ -x-y=4 \end{array}\right\} + \Rightarrow x=-4,\ y=0$$

$\mathrm{R}_8:(-4.0)$

Укупно рјешење је: (4,0), (0,-4), (0,4), (-4.0), $\forall\ x,y\in \mathrm{D}_1$, $\forall\ x,y\in \mathrm{D}_2$.

28. Ријешити систем једначина

$$\boldsymbol{y+x-1=0}$$
$$\boldsymbol{|y|-x-1=0}\ .$$

Рјешење:

а) $\mathrm{y}\geq 0$

$$\left.\begin{array}{r} y+x=1 \\ y-x=1 \end{array}\right\} +$$

$2y=2$

$y=1$

$x=0$

б) $\mathrm{y}<0$

$$\left.\begin{array}{r} y+x=1 \\ -y-x=1 \end{array}\right\} +$$

$0=2$ - немогуће

Рјешење је: x=0, y=1.

29. Ријешити систем једначина

$$\boldsymbol{y-2x+1=0}$$
$$\boldsymbol{|y|-x-1=0}\ .$$

Рјешење:

а) $\mathrm{y}\geq 0$

$y-2x=-1$

$y-x=1\Rightarrow y=x+1$

$x+1-2x=-1$

$x=2$

$y=3$

б) $y<0$

$y-2x=-1$

$-y-x=1$

$-3x=0$

$x=0$

$y=-1$

30. Ријешити систем једначина

$$|2\text{-}x| + y = 4$$
$$|x+3| + 2y = 1 .$$

Рјешење:

	-3	2	
2-x	+	+	-
x+3	-	+	+

а) $x \in (-\infty, -3]$

$$\left.\begin{aligned} 2-x+y&=4 \\ -x-3+2y&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=2,\ x=0$$

Нема рјешења јер $x \notin (-\infty,-3]$

б) $x \in (-3, 2]$

$$\left.\begin{aligned} 2-x+y&=4 \\ x+3+2y&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=0,\ x=-2$$

в) $x \in (2, +\infty)$

$$\left.\begin{aligned} -2+x+y&=4 \\ x+3+2y&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=-8,\ x=14$$

Рјешења су: (-2,0) и (14,-8).

31. Ријешити систем једначина

$$|3\text{-}x| + 2y = 6$$
$$|x+1| + y = 2 .$$

Рјешење:

	-1	3	
3-x	+	+	-
x+1	-	+	+

а) $x \in (-\infty, -1]$

$$\left.\begin{aligned} 3-x+2y&=6 \\ -x-1+y&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=0,\ x=-3$$

б) $x \in (-1, 3]$

$$\left.\begin{aligned} 3-x+2y&=6 \\ x+1+y&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=\frac{4}{3},\ x=-\frac{1}{3}$$

в) $x \in (3, +\infty)$

$$\left.\begin{aligned} -3-x+2y&=6 \\ x+1+y&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=8,\ x=-7$$

Рјешења су: (-3,0) и (-1/3,4/3).

32. Ријешити систем једначина

$$3x + |2y + 2| = 2$$
$$-x - |y - 1| = 0.$$

Рјешење:

	$-\infty$	-1	1
$2y+2$	-	+	+
$y-1$	-	-	+

а)

$$y \in (-\infty, -1)$$
$$\left.\begin{array}{l} 3x - (2y+2) = 2 \\ -x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ x = 6,\ \ y = 7 \text{ - није рјешење}$$

б)

$$y \in (-1, 1)$$
$$\left.\begin{array}{l} 3x + (2y+2) = 2 \\ -x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ x = -\frac{2}{5},\ \ y = \frac{3}{5}$$

в)

$$y \in (1, +\infty)$$
$$\left.\begin{array}{l} 3x + (2y+2) = 2 \\ -x - (y - 1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ x = -2,\ \ y = 3$$

33. Наћи рјешења система неједначина

$$3x^2 - 2x - 1 > 0 \quad (1)$$
$$x^2 + x - 6 < 0 \quad (2).$$

Рјешење:

Из (1) слиједи $(x-1)(x+1/3)>0$, па је рјешење (1) $x \in (-\infty,-1/3) \cup (1,+\infty)$.
Из (2) слиједи $(x-2)(x+3)<0$, па је рјешење (2) $x \in (-3,2)$.
Рјешење система неједначина добијамо из $[(-\infty,-1/3) \cup (1,+\infty)] \cap (-3,2) = (-3,-1/3) \cup (1,2)$.

3. ТРИГОНОМЕТРИЈА

1. Доказати

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}-\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\ .$$

Рјешење:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}-\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta-\sin^2\alpha(1-\cos^2\beta)-\sin^2\beta(1-\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

2. Израчунати $\sin^2 2\alpha$ ако је

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=7\ .$$

Рјешење:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=7$$

$$\frac{\cos^2\alpha+\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=7$$

$$1+\cos^4\alpha+\sin^4\alpha=7\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$9\sin^2\alpha\cos^2\alpha=2$$

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{2}{9}$$

$$4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{8}{9}$$

$$\sin^2 2\alpha=\frac{8}{9}$$

3. Доказати идентитет

$$\frac{1+\cos(2x+630^\circ)+\sin(2x+810^\circ)}{1-\cos(2x-630^\circ)+\sin(2x+630^\circ)}=\operatorname{ctg} x\ .$$

Рјешење:

$$630^\circ=720^\circ-90^\circ,\quad \cos 630^\circ=0,\quad \sin 630^\circ=-1$$

$$810^\circ=720^\circ+90^\circ,\quad \cos 810^\circ=0,\quad \sin 810^\circ=1$$

$$\frac{1+\cos 2x\cos 630^\circ-\sin 2x\sin 630^\circ+\sin 2x\cos 810^\circ+\cos 2x\sin 810^\circ}{1-\cos 2x\cos 630^\circ-\sin 2x\sin 630^\circ+\sin 2x\cos 630^\circ+\cos 2x\sin 630^\circ}=$$

$$\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x}=$$

$$\frac{2\cos x(\cos x+\sin x)}{2\sin x(\cos x+\sin x)}=\operatorname{ctg} x$$

4. Доказати да вриједи $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1$ ако је $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$.

Рјешење:

$$\gamma=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta),\quad \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x)=\operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]+\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=1$$

5. Доказати

$$\sin^2(\frac{\pi}{8}+\alpha)-\sin^2(\frac{\pi}{8}-\alpha)=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}},\qquad (\alpha\in R).$$

Рјешење:

$$\left[\sin(\frac{\pi}{8}+\alpha)-\sin(\frac{\pi}{8}-\alpha)\right]\left[\sin(\frac{\pi}{8}+\alpha)+\sin(\frac{\pi}{8}-\alpha)\right]=$$

$$=2\cos\frac{\frac{\pi}{8}+\alpha+\frac{\pi}{8}-\alpha}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{8}+\alpha-\frac{\pi}{8}+\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{8}+\alpha+\frac{\pi}{8}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{8}+\alpha-\frac{\pi}{8}+\alpha}{2}=$$

$$=4\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{2}[\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8})-\sin(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{8})]\sin 2\alpha=$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$$

6. Доказати идентитет

$$\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 8\cos^4\alpha.$$

Рјешење:

$\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 8\cos^4\alpha$
$(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 3 = 8\cos^4\alpha$
$\cos^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + 3 = 8\cos^4\alpha$
$\cos^4\alpha - 6(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha + 4\cos^2\alpha + (1-\cos^2\alpha)^2 - 4(1-\cos^2\alpha) + 3 = 8\cos^4\alpha$
$\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha + 6\cos^4\alpha + 4\cos^2\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha - 4 + 4\cos^2\alpha + 3 = 8\cos^4\alpha$
$8\cos^4\alpha = 8\cos^4\alpha$

7. Доказати једнакост

$$\frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ} = 1\ .$$

Рјешење:

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\sin 30^\circ + \sin 10^\circ\right] + \frac{1}{2}\left[\cos 60^\circ + \cos 260^\circ\right]}{\frac{1}{2}\left[\sin 30^\circ + \sin 12^\circ\right] + \frac{1}{2}\left[\cos 60^\circ + \cos 258^\circ\right]} = \frac{\frac{1}{2} + \sin 10^\circ + \frac{1}{2}\cos 260^\circ}{\frac{1}{2} + \sin 12^\circ + \frac{1}{2} + \cos 258^\circ} = \frac{1 + \sin 10^\circ + \cos 260^\circ}{1 + \sin 12^\circ + \cos 258^\circ} = 1$$

$$\cos 260^\circ = \cos\left(270^\circ - 10^\circ\right) = -\sin 10^\circ$$
$$\cos 258^\circ = \cos\left(270^\circ - 12^\circ\right) = -\sin 12^\circ$$

8. Доказати идентитет

$$\frac{\cos^2\alpha + 2\sin^2(\alpha - \pi)}{\cos^3(\alpha - 4\pi)} + \frac{\cos^2\alpha + 4\sin\alpha + \sin^2(\alpha + \pi)}{\cos\alpha(4\sin\alpha + 1)} = \frac{2}{\cos^3\alpha}\ .$$

Рјешење:

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$$
$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha - 4\pi) = \cos\alpha$$
$$\frac{\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha} + \frac{\cos^2\alpha + 4\sin\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha(4\sin\alpha + 1)} = \frac{2}{\cos^3\alpha}$$
$$\frac{\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{2}{\cos^3\alpha}$$
$$\frac{2}{\cos^3\alpha} = \frac{2}{\cos^3\alpha}$$

9. Доказати идентитет

$$\frac{2}{tg\alpha+1}=\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha(tg^2\alpha-1)}\ .$$

Рјешење:

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}-\frac{1+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{2}{tg\alpha+1}$$

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{2}{tg\alpha+1}$$

$$\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{2}{tg\alpha+1}$$

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{2}{tg\alpha+1}$$

$$\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2}{tg\alpha+1}$$

$$\frac{2}{tg\alpha+1}=\frac{2}{tg\alpha+1}$$

10. Одредити $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ ако је $3\sin\alpha+4\cos\alpha=5$.

Рјешење:

$$3\sin\alpha=5-4\cos\alpha \quad\Rightarrow\ \sin\alpha=\frac{5-4\cos\alpha}{3}$$

$$\sin^2\alpha+\cos\alpha=1 \quad\Rightarrow\ \left(\frac{5-4\cos\alpha}{3}\right)^2+\cos^2\alpha=1$$

$$25\cos^2\alpha-40\cos\alpha+16=0$$

$$(\cos\alpha)_{1,2}=\frac{4}{5},\quad \sin\alpha=\frac{3}{5}$$

11. Ријешити једначину $\cos^2 2x+\sin^4 x=2$.

Рјешење:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 2x+\frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2=2$$

$$5\cos^2 2x-2\cos 2x-7=0$$

Смјена : $\cos 2x=m.$

$$5m^2-2m-7=0$$

$$m_1=\frac{7}{5},\quad m_2=-1$$

$$\cos 2x=\frac{7}{5}-\text{немогуће}$$

$$\cos 2x=-1\Rightarrow 2x=(2k+1)\pi\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

12. Ријешити једначину sin4*x*+sin*x*=sin3*x*+sin2*x*.

Рјешење:

$$2\sin\frac{4x+x}{2}\cos\frac{4x-x}{2}=2\sin\frac{3x+2x}{2}\cos\frac{3x-2x}{2}$$
$$\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}=\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$\sin\frac{5x}{2}(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{x}{2})=0$$
$$\sin\frac{5x}{2}(-2\sin\frac{\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}}{2}\sin\frac{\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}}{2})=0$$
$$\sin\frac{5x}{2}\sin x\sin\frac{x}{2}=0$$

а) $\sin\frac{5x}{2}=0\Rightarrow\frac{5x}{2}=k\pi\Rightarrow x_1=\frac{2k\pi}{5}$

б) $\sin x=0\Rightarrow x_2=k\pi$

в) $\sin\frac{x}{2}=0\Rightarrow x_3=2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots:$

Рјешења су: $x_1=\frac{2k\pi}{5},\quad x_2=k\pi.$

13. Ријешити једначину

$$\mathbf{tg}\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=-\sqrt{3}.$$

Рјешење:

$$\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\quad k\in Z$$
$$6\pi x=(-\pi+3k\pi)(x^2+x+1)$$
$$(3k-1)x^2+(3k-7)x+3k-1=0$$
$$D=(3k-7)^2-4(3k-1)^2\ge 0,\quad k\in Z$$
$$3k^2+2k-5=0\Rightarrow(k+\frac{5}{3})(k-1)\le 0$$ (да би имала реална рјешења)
$$k_1=-1,\quad k_2=0,\quad k_3=1$$

За $k_1=-1\Rightarrow 2x^2+5x+2=0\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2},\quad x_2=-2$

За $k_2=0\Rightarrow x^2+7x+1=0\Rightarrow x_{3,4}=\frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$

За $k_3=1\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow x_{5,6}=1$

14. Наћи сва рјешења једначине

$$\frac{2}{1+\mathrm{ctg}^2 x} = 5\sin x - 2.$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $1+\mathrm{ctg}^2 x \neq 0,\ \forall x \in \mathrm{R}$.

$$\frac{2}{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = 5\sin x - 2$$

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Смјена : $\sin x = t$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_1 = 2,\quad t_2 = \frac{1}{2}$$

$\sin x = 2$ – немогуће

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\quad k \in Z$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\quad k \in Z$$

15. а) Ријешити једначину

$$\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1 .$$

б) Колико има рјешења у сегменту [5π,7π]?

Рјешење:

а) $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1 \Rightarrow \sin\frac{x}{2} = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

$$\sin\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$$

$$\sin\frac{x}{2}\left(1 - 2\sin\frac{x}{2}\right) = 0$$

1° $\sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x_k = 2k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$

2° $1 - 2\sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathrm{Z}$

$$x_n = \frac{\pi}{3} + 4n\pi,$$

3° $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi,\ m \in \mathrm{Z}$

$$x_m = \frac{5\pi}{3} + 4m\pi,\ m \in \mathrm{Z}$$

б) У сегменту [5π,7π] налазе се два рјешења и то су : $x=6\pi$ и $x=5\pi/3+4\pi=2\pi/3+5\pi$.

16. Наћи нуле функције

$$\mathbf{f\,(x) = \cos^2 2x + \sin^2 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2}\ .$$

Рјешење:

$$\cos^2 2x + \sin^2 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2 = 0$$
$$\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)^2 + \sin^2 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2 = 0$$
$$\left(1 - 2\sin^2 x\right)^2 + \sin^2 x - \sin^2 x\left(1 - \sin^2 x\right) - 2 = 0$$
$$5\sin^4 x - 4\sin^2 x - 1 = 0$$
$$\text{Смјена}:\ x = \sin^2 x \ \Rightarrow\ 5t^2 - 4t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{5}$$

17. а) Риједшити једначину

$$\mathbf{\sin 4x - \sin 3x = \sin 2x - \sin x}\ .$$

б) Колико има рјешења у сегменту [π, 3π]?

Рјешење:

а)
$$2\cos\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}$$
$$2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{7x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0 \Big| : 2$$
$$\sin\frac{x}{2}\left(-2\sin\frac{\frac{7x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\sin\frac{\frac{7x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right) = 0$$
$$\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}\sin x = 0$$
$$\sin\frac{x}{2} = 0 \vee \sin\frac{5x}{2} = 0 \vee \sin x = 0$$
$$\sin\frac{x}{2} = 0 \ \Rightarrow\ x_k = 2k\pi,\ \sin\frac{5x}{2} = 0 \ \Rightarrow x_m = \frac{2}{5}m\pi$$
$$\sin x = 0 \ \Rightarrow\ x_s = s\pi\ , \quad k, m, s \in \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$$

б) $x_1 = \pi,\ \ x_2 = 2\pi,\ \ x_3 = 3\pi,\ x_4 = \frac{6\pi}{5},\ x_5 = \frac{8\pi}{5},\ \ x_6 = \frac{12\pi}{5}, x_7 = \frac{14\pi}{5}.$

18. а) Ријешити једначину

$$\cos\frac{x}{2}-\cos x=1\ .$$

б) Колико има рјешења у сегменту [2π, 4π]?

Рјешење:

а)

$$\cos\frac{x}{2}=1+\cos x \Rightarrow \cos\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2}\cos\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(1-2\cos\frac{x}{2}\right)=0 \Rightarrow \cos\frac{x}{2}=0 \vee 1-2\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\cos\frac{x}{2}=0 \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$x_k=\pi+2k\pi$$

$$1-2\cos\frac{x}{2}=0 \quad \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2n\pi \quad \Rightarrow x_n=\frac{2\pi}{3}+4n\pi$$

$$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}+2s\pi \quad \Rightarrow x_s=-\frac{2\pi}{3}+4s\pi$$

$$k\,,n\,,s\in\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$$

б) $x_1=3\pi,\ x_2=\frac{10\pi}{3}.$

19. Ријешити једначину

sin*x*+sin3*x*+sin2*x*=1+cos2*x*+cos*x*.

Рјешење:

$$2\sin\frac{4x}{2}\cos\left(-\frac{2x}{2}\right)+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x$$

$$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x$$

$$\sin 2x(2\cos x+1)=\cos x(2\cos x+1)$$

$$(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos x)=0$$

$$(2\cos x+1)\cos x(2\sin x-1)=0$$

$$2\cos x+1=0\vee\cos x=0\vee 2\sin x-1=0$$

$$\cos x=0\Rightarrow x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$$

$$2\cos x+1=0\Rightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x_m=\frac{2\pi}{3}+2m\pi$$

$$x_n=\frac{4\pi}{3}+2n\pi \qquad m,n\in Z$$

$$2\sin x\text{-}1=0 \Rightarrow\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x_s=\frac{\pi}{6}+2s\pi,\ s\in Z$$

20. Ријешити једначину

$$\mathbf{ctg}x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2 \ .$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $\sin x \neq 0 \wedge \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq k\pi,\ x \neq \pi + 2s\pi,\ k, s \in Z$

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2 \quad \Big| \cdot \sin x(1+\cos x)$$

$$\cos x(1+\cos x) + \sin^2 x = 2\sin x(1+\cos x)$$

$$\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin x + 2\sin x \cos x$$

$$\cos x + 1 = 2\sin x(1+\cos x)$$

$$(\cos x + 1)(1 - 2\sin x) = 0 \ \Rightarrow 1 - 2\sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

21. Ријешити тригонометријску једначину

$$\mathbf{1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).}$$

Рјешење:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$1 - \cos^2 2x = \sin 3x + \sin x$$

$$\sin^2 2x = 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}$$

$$\sin^2 2x = 2\sin 2x \cos x$$

$$\sin 2x(\sin 2x - 2\cos x) = 0$$

$$\sin 2x(2\sin x\cos x - 2\cos x) = 0$$

$$\sin 2x \cos x(\sin x - 1) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \ \vee \ \cos x = 0 \ \vee \ \sin x - 1 = 0$$

$$\sin 2x = 0 \ \Rightarrow \ x_k = \frac{k\pi}{2}$$

$$\cos x = 0 \ \Rightarrow \ x_k = \frac{k\pi}{2}$$

$$\sin x = 1 \ \Rightarrow \ x_m = \frac{\pi}{2} + 2m\pi,\ m, k \in Z$$

22. Наћи оно рјешење неједначине

$$\frac{1-\cos x}{1-2\cos x} < \frac{1+\cos x}{1-4\cos^2 x}$$

за које је $x \in (0, 2\pi)$.

Рјешење:

$$\text{Дефиницион о подручје} : 1-2\cos x \neq 0 \wedge 1+2\cos x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{1-\cos x}{1-2\cos x} - \frac{1+\cos x}{1-4\cos^2 x} < 0$$

$$\frac{(1-\cos x)(1+2\cos x) - 1 - \cos x}{1-4\cos^2 x} < 0$$

$$\frac{-2\cos^2 x}{1-4\cos^2 x} < 0 \Rightarrow 1-4\cos^2 x > 0$$

$$(1-2\cos x)(1+2\cos x) > 0$$

$$\left.\begin{matrix}(1-2\cos x) > 0\\ (1+2\cos x) > 0\end{matrix}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{matrix}(1-2\cos x) < 0\\ (1+2\cos x) < 0\end{matrix}\right\}$$

$$\text{Рјешење} : \; x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \setminus \{\pm \frac{\pi}{3}\}$$

23. Ријешити неједначину

$$\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}$$

Рјешење:

$$\cos^2 x \cos x \cos 3x - \sin^2 x \sin x \sin 3x > \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2}\cos^2 x(\cos 4x + \cos 2x) - \frac{1}{2}\sin^2 x(\cos 2x - \cos 4x) > \frac{5}{8}$$

$$\cos 4x(\cos^2 x + \sin^2 x) + \cos 2x(\cos^2 x - \sin^2 x) > \frac{5}{4}$$

$$\cos 4x + \cos 2x \cos 2x > \frac{5}{4}$$

$$\cos 4x + \frac{1+\cos 4x}{2} > \frac{5}{4}$$

$$\cos 4x > \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 4x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

24. Ријешити неједначину

$$\cos^2 x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\cos x < \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Рјешење:

$$\text{Смјена}: \cos x = t$$

$$t^2 - \frac{1-\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{4} < 0$$

$$t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0 \Rightarrow t \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

25. Ријешити систем једначина

$$(1) \quad \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$(2) \quad \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Рјешење:

$$(1)+(2) \Rightarrow \sin x \sin y + \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2)-(1) \Rightarrow \cos x \cos y - \sin x \sin y = 0$$

$$\cos(x+y) = 0$$

$$\cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x-y = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad (n \in Z)$$

$$\cos(x+y) = 0 \Rightarrow x+y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in Z)$$

$$\left.\begin{aligned} x-y &= \frac{\pi}{6} + 2n\pi \\ x+y &= \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + \pi(2n+k)$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(2n+k)$$

$$y_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(k-2n)$$

$$\left.\begin{aligned} x-y &= -\frac{\pi}{6} + 2n\pi \\ x+y &= \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + \pi(2n+k)$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(2n+k)$$

$$y_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(k-2n)$$

4. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ И ЛОГАРИТАМСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ, НЕЈЕДНАЧИНЕ И СИСТЕМИ

1. Ријешити једначину $\mathbf{5\cdot 3^{2x-1}-9^{x-0.5}=9^{x}+4\cdot 3^{2x-2}}$.

Рјешење:

$$5\cdot 3^{2x-1}-3^{2(x-0.5)}=3^{2x}+4\cdot 3^{2x-2}$$
$$5\cdot 3^{2x-1}-3^{2x-1}-3^{2x}-4\cdot 3^{2x-2}=0$$
$$4\cdot 3^{2x-1}-3^{2x}-4\cdot 3^{2x-2}=0$$
$$3^{2x}\left(\frac{4}{3}-1-\frac{4}{9}\right)=0\Rightarrow 3^{2x}=0$$

Једначина нема рјешење.

2. Ријешити једначину

$$\mathbf{3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0\quad (x\neq 0).}$$

Рјешење:

$$3\sqrt[x]{9^2}-10\sqrt[x]{9}+3=0$$
Смјена : $\sqrt[x]{9}=t.$
$$3t^2-10t+3=0$$
$$t_1=3,\ t_2=\frac{1}{3}$$
$$\sqrt[x]{9}=3\Rightarrow 3^{\frac{2}{x}}=3\Rightarrow x=2$$
$$\sqrt[x]{9}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3^{\frac{2}{x}}=3^{-1}\Rightarrow x=-2$$

3. Ријешити једначину

$$\mathbf{3\cdot 3^{x}+4\cdot 3^{x+1}+5\cdot 3^{x+2}=202.5\cdot 2^{x}}\ .$$

Рјешење:

$$3^{x}\left(3+4\cdot 3+5\cdot 3^{2}\right)=\frac{405}{2}\cdot 2^{x}$$
$$3^{x}\cdot 60=\frac{405}{2}\cdot 2^{x}\quad\Rightarrow\quad \frac{3^{x}}{2^{x}}=\frac{27}{8}\quad\Rightarrow\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\quad\Rightarrow \mathrm{x}=3$$

4. Ријешити једначину

$$\mathbf{0.4^{\log^2 x+1} - 6.25^{2-\log x^3} = 0.}$$

Рјешење:

Област дефинисаности: $x>0$.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2(2-3\log x)}$$

$$\log^2 x + 1 = -4 + 6\log x$$

$$\log^2 x - 6\log x + 5 = 0$$

Уведимо смјену: $\log x = t$.

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$t_1 = 5,\quad t_2 = 1$$

$$\log x = 5 \Rightarrow x = 10^5$$

$$\log x = 1 \Rightarrow x = 10$$

5. Ријешити једначину $\mathbf{\log_{x-1}(x^2-5x+10)=2.}$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $x^2-5x+10>0$ за $\forall x\in R$, $x-1>0 \wedge x-1\neq 1$, тј. $x>1$ и $x\neq 2$.

$x^2-5x+10=(x-1)^2$

$x^2-5x+10-x^2+2x+1=0 \Rightarrow -3x+9=0 \Rightarrow x=3$

6. Ријешити једначину

$$\mathbf{\frac{\log x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\log 5 - 1}{\frac{1}{4}\log(x-1)} = \log 0,01\ .}$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $x-1>0 \wedge x>0$ тј. $x>1$.

$$\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log 5 - 1 = -2\,\frac{1}{4}\log(x-1)$$

$$\log x + \log 5 - 2 = -\log(x-1)$$

$$\log\frac{5x}{100} = \log(x-1)^{-1}$$

$$\frac{x}{20} = \frac{1}{x-1}$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

$$x_1 = 5,\quad x_2 = -4$$

Рјешење је $x=5$, јер $x=-4$ не припада дефиниционом подручју.

7. Ријешити једначину $0{,}1x^{\log x-2}=100$.

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $x>0$.

$$x^{\log x-2}=10^3$$
$$\log x^{\log x-2}=\log 10^3$$
$$(\log x-2)\log x=3$$
$$\log^2 x-2\log x-3=0$$
$$\text{Смјена}:\log x=t$$
$$t^2-2t-3=0$$
$$t_1=3, t_2=-1$$
$$\log x=3\Rightarrow x=10^3$$
$$\log x=-1\Rightarrow x=10^{-1}$$

8. Наћи сва рјешења једначине

$$\mathbf{4^{\log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5)}=\frac{1}{9}}\ .$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $\sin^2 x+5\sin x\cos x+5>0,\ \forall x\in R$.

$$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} a=\frac{\log_4 a}{\log_4\frac{1}{2}}=-2\log_4 a=\log_4\frac{1}{a^2}$$
$$4^{\log_4(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5)^{-2}}=\frac{1}{9}$$
$$(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5)^2=9$$
$$(\sin^2 x+5\sin x\cos x+8)(\sin^2 x+5\sin x\cos x+2)=0$$
$$\sin^2 x+5\sin x\cos x+8=0/:\cos^2 x\neq 0\quad (x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi)$$
$$\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg}x+\frac{8}{\cos^2 x}=0,\quad (\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x})$$
$$9\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg}x+8=0$$
$$\text{Смјена}:\quad \operatorname{tg}x=t.$$
$$9t^2+5t+8=0$$
$$D<0\Rightarrow \text{нема реална рјешења}$$
$$\sin^2 x+5\sin x\cos x+2=0$$
$$3\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg}x+2=0$$
$$3t^2+5t+2=0$$
$$t_1=-\frac{2}{3},\quad t_2=-1$$

Рјешење је: $\operatorname{tg}x=-1 \wedge \operatorname{tg}x=-2/3$.

9. Ријешити једначину

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\cdot x^{0.5\left(\log_2 x^2\right)^2-7}=\frac{x^6}{2^{11}}\ .$$

Рјешење:

Дефиницион о подручје :

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+1}-1\neq 0\\ \sqrt{x+1}+1\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow x\neq 0\wedge \left.\begin{array}{l}x\geq -1\\ x>0\end{array}\right\}\Rightarrow x\in(0,+\infty)$$

$$\frac{\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1}{x+1-1}\cdot x^{\frac{1}{2}(2\log_2 x)^2-7}=\frac{x^6}{2^{11}}$$

$$\frac{2}{x}\cdot x^{\frac{1}{2}\cdot 4\log_2{}^2 x-7}=\frac{x^6}{2^{11}}\Rightarrow\frac{x^{2\log_2{}^2 x}}{x^7}=\frac{x^7}{2^{12}}$$

$$2^{12}\cdot x^{2\log_2{}^2 x}=x^{14}$$

$$\log_2 2^{12}+\log_2 x^{2\log_2{}^2 x}=\log_2 x^{14}$$

$$2\log_2{}^3 x-14\log_2 x+12=0$$

$$\log_2{}^3 x-7\log_2 x+6=0$$

Смјена : $t=\log_2 x$

$$t^3-7t+6=0\Rightarrow t_1=1, t_2=2, t_3=-3$$

$$\log_2 x=1\Rightarrow x_1=2, \log_2 x=2\Rightarrow x_2=4, \log_2 x=-3\Rightarrow x_3=\frac{1}{8}$$

10. Ријешити једначину

$$\log_2\sqrt[3]{6^{\sqrt{2x+1}}+28}=2\ .$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $2x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -\frac{1}{2}\Rightarrow x\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

$$\sqrt[3]{6^{\sqrt{2x+1}}+28}=4$$

$$6^{\sqrt{2x+1}}+28=64$$

$$6^{\sqrt{2x+1}}=36$$

$$\sqrt{2x+1}=2$$

$$2x+1=4$$

$$x=\frac{3}{2}$$

11. Ријешити једначину

$$\log\sqrt{75+5^{\sqrt[3]{x-1}}}=1\,.$$

Рјешење:

Дефиницион о подручје : $\forall\, x \in \mathrm{R}$

$$\sqrt{75+5^{\sqrt[3]{x-1}}}=10\Big|^2 \quad\Rightarrow\quad 75+5^{\sqrt[3]{x-1}}=100$$

$$5^{\sqrt[3]{x-1}}=25 \quad\Rightarrow\quad 5^{\sqrt[3]{x-1}}=5^2$$

$$\sqrt[3]{x-1}=2\Big|^3 \quad\Rightarrow\quad x=9$$

12. Ријешити једначину

$$\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}}=10\,.$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $x>0$, $x\neq 1$.

$$x^{\log\sqrt{x}}=100\Big|\log$$

$$\log x^{\log\sqrt{x}}=\log 10^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\log^2 x=2$$

$$\log^2 x=4 \Rightarrow \log x=2 \;\wedge\; \log x=-2$$

$$x_1=100,\; x_2=\frac{1}{100}$$

13. Ријешити једначину

$$\log_{\frac{1}{56}}\left(5^{x+1}-25^x\right)=-2\,.$$

Рјешење:

Дефиницион о подручје : $5^{x+1}-25^x>0 \Rightarrow 5^{x+1}>5^{2x} \Rightarrow x+1>2x \Rightarrow x<1$

$$5^{x+1}-25^x=\left(56^{-1}\right)^{-2}$$

$$5^{x+1}-5^{2x}=56^2$$

$$5\cdot 5^x-5^{2x}-3136=0$$

Смјена : $5^x=t$

$$t^2-5t+3136=0$$

$$D=b^2-4ac=25-4\cdot 3136=-12519$$

Како је $D<0$ то значи да немамо реална рјешења.

14. Ријешити једначину

$$x^{2\log x-5}=0.01.$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $x>0\wedge x\neq 1$

$$x^{2\log x-5}=10^{-2}\Big|\log$$
$$(2\log x-5)\log x=\log 10^{-2}$$
$$2\log^2 x-5\log x+2=0$$
$$\text{Смјена}:\log x=t$$
$$2t^2-5t+2=0$$
$$t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$$
$$t_1=2,\ t_2=\frac{1}{2}$$
$$\log x=2\Rightarrow x=100$$
$$\log x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\sqrt{10}$$

15. Ријешити једначину

$$\log\sqrt[3]{10(x-1)^2}-\frac{2}{3}\log(3+x)=\frac{1}{3}.$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $3+x>0\ \Rightarrow\ x>-3$

$$\frac{1}{3}\log 10(x-1)^2-\frac{2}{3}\log(3+x)=\frac{1}{3}$$
$$\log 10(x-1)^2-\log(3+x)^2=1$$
$$\log\frac{10(x-1)^2}{(3+x)^2}=1$$
$$\frac{10(x-1)^2}{(3+x)^2}=10$$
$$(x-1)^2=(3+x)^2\ \Rightarrow\ x^2-2x+1=9+6x+x^2$$
$$-8x=8$$
$$x=-1$$

16. Риjешити jедначину

$$x^{1+\log_2 x} = 4.$$

Рјешење:

Дефиницион о подручје : $x > 0 \wedge x \neq 1$

$$\log_2 x^{1+\log_2 x} = \log_2 4$$
$$(1+\log_2 x)\log_2 x = 2$$
$$\log^2{}_2 x + \log_2 x - 2 = 0$$

Смјена : $\log_2 x = t$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -2$$
$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x_1 = 2$$
$$\log_2 x = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}$$

17. Риjешити jедначину

$$2(\log 2 - 1) + \log\left(5^{\sqrt{x}} + 1\right) = \log\left(5^{1-\sqrt{x}} + 5\right)$$

Рјешење:

Д.П. $x \geq 0.$

$$\log 2^2 - 2 + \log\left(5^{\sqrt{x}} + 1\right) - \log\left(5^{1-\sqrt{x}} + 5\right) = 0$$
$$\log \frac{4\left(5^{\sqrt{x}} + 1\right)}{5^{1-\sqrt{x}} + 5} = 2$$
$$\frac{4\left(5^{\sqrt{x}} + 1\right)}{5^{1-\sqrt{x}} + 5} = 100 \Rightarrow \frac{5^{\sqrt{x}} + 1}{5^{1-\sqrt{x}} + 5} = 25 \Rightarrow \circ\circ\circ \Rightarrow$$
$$\left(5^{\sqrt{x}}\right)^2 - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 125 = 0$$
$$5^{\sqrt{x}} = t \Rightarrow t^2 - 124t - 125 = 0$$

$t_1 = 125,$

$t_2 = -1$(није рјешење јер је $t > 0$)

$$5^{\sqrt{x}} = 5^3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9.$$

18. Ријешити једначину

$$\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x=\log\sqrt{100}.$$

Рјешење:

$$\begin{aligned}
&\text{Д.П. } x\geq 0 \ \wedge x\neq 1\\
&\log_{3x}3-\log_{3x}x+\log_3^2 x=1\\
&\frac{1}{\log_3 3x}-\frac{\log_3 x}{\log_3 3x}+\log_3{}^2 x=1\\
&1-\log_3 x+\log_3{}^2 x\cdot\log_3 3x=\log_3 3x\\
&(1+\log_3 x)\log_3{}^2 x-2\log_3 x=0\\
&\left(\log_3{}^2 x+\log_3 x-2\right)\log_3 x=0\\
&\log_3 x=0\Rightarrow x=1,\text{ није рјешење}\\
&\log_3 x=t\Rightarrow t^2+t-2=0\Rightarrow t_1=1, t_2=-2\\
&\log_3 x=1\Rightarrow x=3\\
&\log_3 x=-2\Rightarrow x=\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Рјешења једначине су $x=3\wedge x=\frac{1}{9}$.

19. Ријешити једначину

$$\log\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right)-2=\frac{1}{4}\log 16-\sqrt{x+0{,}25}\cdot\log 4.$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $4x+1\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\geq-\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
&\log\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right)-2=\frac{1}{4}\log 4^2-\sqrt{x+\frac{1}{4}}\cdot\log 4\\
&\log\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right)-2=\frac{1}{2}\log 4-\frac{\sqrt{4x+1}}{2}\cdot\log 4\\
&\log\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right)-2=\frac{1}{2}\log 2^2\cdot\left(1-\sqrt{4x+1}\right)\\
&\log\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right)-2=\left(1-\sqrt{4x+1}\right)\log 2\\
&\log\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right)-2=\log 2^{1-\sqrt{4x+1}}\\
&\log\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right)-\log 2^{1-\sqrt{4x+1}}=2\log 10\\
&\log\frac{3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}}{2^{1-\sqrt{4x+1}}}=\log 10^2
\end{aligned}$$

$$\frac{3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}}{2^{1-\sqrt{4x+1}}}=100$$

$$\frac{3^{\sqrt{4x+1}}-2^4\cdot 2^{-\sqrt{4x+1}}}{2^{-\sqrt{4x+1}}}=200$$

$$\frac{3^{\sqrt{4x+1}}}{2^{-\sqrt{4x+1}}}-2^4=200$$

$$3^{\sqrt{4x+1}}\cdot 2^{\sqrt{4x+1}}=216$$

$$6^{\sqrt{4x+1}}=6^3$$

$$\sqrt{4x+1}=3 \;\Rightarrow\; x=2$$

20. Ријешити неједначину

$$\mathbf{\frac{1}{\log x}+\frac{1}{1-\log x}>1.}$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $x>0 \wedge \log x\neq 0 \wedge 1-\log x\neq 0$; слиједи да је $x\in(0,1)\cup(1,10)\cup(10,+\infty)$.

$$\frac{1}{\log x(1-\log x)}-1>0$$

$$\frac{1-\log x+\log^2 x}{\log x(1-\log x)}>0$$

Смјена: $\log x=t$

$$\frac{1-t+t^2}{t(1-t)}>0$$

Како је $1-t+t^2>0$ за $\forall x\in R$ слиједи $t(1-t)>0 \Rightarrow t\in(0,1)$.
$0<\log x<1 \;\Rightarrow\; 1<x<10$

Рјешење је $x\in(1,10)$.

21. Ријешити систем једначина

$$\mathbf{3^x\cdot 2^y=\frac{1}{9}}$$
$$\mathbf{y-x=2}\quad .$$

Рјешење :

$$y=x+2$$

$$3^x\cdot 2^{x+2}=\frac{1}{9}$$

$$3^2\cdot 3^x\cdot 2^{x+2}=1$$

$$3^{x+2}\cdot 2^{x+2}=1$$

$$6^{x+2}=1$$

$$x+2=0$$

$$x=-2$$

22. Ријешити систем једначина

$$\boldsymbol{y\cdot x^{\log_y x}=x^{\frac{5}{2}}}$$
$$\boldsymbol{\log_4 y\cdot\log_y(3x-y)=1\ .}$$

Рјешење:

Дефиниционо подручје: $y>0 \wedge x>0 \wedge 3x>y$.
Логаритмујмо прву једначину (са основом y).

$$\log_y y+\log_y x^{\log_y x}=\log_y x^{\frac{5}{2}}$$
$$1+\log_y^2 x=\frac{5}{2}\log_y x$$
$$\log_y^2 x-\frac{5}{2}\log_y x+1=0$$
Смјена $:\log_y x=t.$
$$t^2-\frac{5}{2}t+1=0$$
$$t_1=2,\quad t_2=\frac{1}{2}$$

Другу једначину можемо написати као:

$$\log_y(3x-y)=\log_y 4$$
$$3x-y=4$$

а) $3x-y=4$
$$x=y^2$$
$$3y^2-y-4=0$$
$$y_1=\frac{4}{3},y_2=-1$$

Рјешење је x=16/9, y=4/3.

б) $3x-y=4$
$$x=\sqrt{y}$$
$$x^2\text{-}3x+4=0$$
$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2}$$

Нема рјешења.

23. Ријешити систем једначина

$$\mathbf{2^{2x}\cdot 3^{2y+1}+16\cdot 2^{2y}=48\cdot 3^{2y}}$$
$$\mathbf{2^{x}\cdot 3^{y}+4\cdot 2^{y}=8\cdot 3^{y}.}$$

Рјешење: Подијелимо прву једначину са 3^{2y}, а другу са 3^y:

$$3\cdot 2^{2x}+16\cdot\frac{2^{2y}}{3^{2y}}=48$$
$$2^x+4\frac{2^y}{3^y}=8$$
Уводимо смјене : $u=2^x, v=\frac{2^y}{3^y}=\left(\frac{2}{3}\right)^y$

$$3u^2+16v^2=48$$
$$u+4v=8\Rightarrow u=8-4v$$
$$3(8-4v)^2+16v^2=48\Rightarrow 3v^2-12v+9=0$$
$$v_{1,2}=\frac{3}{2}\Rightarrow u=2$$
$$u=2^x\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1$$
$$v=\left(\frac{2}{3}\right)^y\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^y=\frac{3}{2}\Rightarrow y=-1$$

Рјешење је: $x=1,\ y=-1.$

24. Риjешити систем једначина

$$\mathbf{2\log x+\log y^2=4}$$
$$\mathbf{\log\sqrt{5(x-5)}-\log\sqrt{3y-2}=0.5}$$

Рјешење:

Д.П.

$$\left.\begin{array}{l} x>0,y>0\\ x-5>0\Rightarrow x>5\\ 3y-2>0\Rightarrow y>\frac{2}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow x>5,y>\frac{2}{3}$$

$$2\log x+2\log y=4$$
$$\frac{1}{2}\log 5(x-5)-\frac{1}{2}\log(3y-2)=\frac{1}{2}$$
$$\log x+\log y=2$$
$$\log 5(x-5)-\log(3y-2)=1$$

$$\begin{array}{l}\log xy=2\\ \log\frac{5(x-5)}{3y-2}=1\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}xy=100\\ \frac{5(x-5)}{3y-2}=10\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}xy=100\\ 5x-30y=5\end{array}$$

$$\begin{array}{l}xy=100\\ x=6y+1\end{array}\Rightarrow 6y^2+y-100=0\Rightarrow y_1=4,\quad y_2=-\frac{25}{6}$$ -не припада дефиниционом подручју

$$x_1=25$$

Рјешење је (25,4).

5. ЗАДАЦИ ЗА ВЈЕЖБУ

1. Одредити вриједност израза

$$\frac{\left(a^2-\frac{1}{b^2}\right)^a\left(b+\frac{1}{a}\right)^{b-a}}{\left(b^2-\frac{1}{a^2}\right)^b\left(a-\frac{1}{b}\right)^{a-b}},\ \text{за } a=2,\ b=1. \qquad \text{(Р: 8)}$$

2. Упростити израз

$$\left(x^2-100\right):\left(\frac{5}{x^2-4}-\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{3}{(x+2)^2}\right). \qquad \text{(Р: } 1/4(x+10)(x^2-4)^2\text{)}$$

3. Упростити израз

$$\frac{4-\frac{4+a^2}{a}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{a}}:\left(\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a+2}\right). \qquad \text{(Р: } -\frac{(a-2)^3}{a}\text{)}$$

4. Упростити израз

$$\left(\frac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}},\quad \left(a>0,\ x>0,\ a\neq x\right). \qquad \text{(Р: } \sqrt{ax}+a\text{)}$$

5. Упростити израз

$$\text{A}=\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-8}{\sqrt[4]{x}-2}+2\sqrt[4]{x}\right)^{0.5}\left(4x-\sqrt{x^3}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+8}{\sqrt[4]{x}+2}-x^{0.5}\right) \qquad \text{(Р: за } x\in(0,16)\cup(16,+\infty),\ \text{A}=\frac{2}{x}\text{)}$$

6. Ријешити једначине:

а) $\frac{5(x-2)}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+3}=3$

б) $\frac{2x+a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$.

(Р: а) $x=-\frac{9}{2}$; б) $x=2b$, за $a\neq b,\ a,b\neq 0$)

7. Ријешити системе једначина:

а) $\begin{aligned}3x+my&=m+5\\2x+5y&=8\end{aligned}$

б) $\begin{aligned}2x^2+5xy-18y^2&=0\\xy+y^2-12&=0\end{aligned}$.

(Р: а) $x=\frac{3m-25}{2m-15},\ y=\frac{2(m-7)}{2m-15}$, за $m\neq\frac{15}{2}$; б) (4,2), (-4,-2))

8. Ријешити систем неједначина

$$\begin{aligned}0.4x+\frac{7}{3}&<\frac{2}{3}x-1.2\\5x+17&>9x-63\ .\end{aligned} \qquad \text{(Р: } \frac{53}{4}<x<20\text{)}$$

9. Ријешити неједначину

$$\frac{x^2-2x+5}{2x^2-x-1}>1 \ .$$ (Р: $x\in\left(-3,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,2)$)

10. Ријешити неједначину

$$\left|\frac{3|x|+2}{|x|-1}\right|<3 .$$ (Р: $x\in\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$)

11. Ријешити системе једначина:

а) $\begin{array}{l} |2x-1|-y=2 \\ x-|4-y|=-1 \end{array}$

б) $\begin{array}{l} |x-2|+y+3=7 \\ x-2-|y+3|=-1 \ . \end{array}$

(Р: а) (2,1), (8,13); б) (5,1))

12. Дата је једначина $(m-2)x^2-2(m+1)x+m+3=0$.Одредити параметар m тако да збир квадрата њених рјешења буде једнак 52.

(Р: $m_1=\frac{32}{25}, m_2=3$)

13. За које реалне вриједности параметра a неједначина

$$\left|\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right|<2 \ , \quad \text{вриједи } \forall x\in \mathrm{R}\ ?$$ (Р: $a\in(0,4)$)

14. Ријешити једначине:

а) $0.5^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}$

б) $3^x-3^{x-1}=2\cdot 9^{x-2}$. (Р: а) $x_1=-2, x_2=4$; б) x=3)

15. Ријешити неједначину

$$3\cdot 5^x+5^{x-1}<50\cdot 2^x \ .$$ (Р: x<3)

16. Ријешити једначине:

а) $2\log(x-2)-\log(2x-3)=2\log 4-\log 9$

б) $\log(7x+5)+\log(2x+7)=\log 9+\log 12$

в) $\log_2\log_3(2x+3)+\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{2x+3}=1$

г) $2\log_4\left(2^x-1\right)+x+\log_{\frac{1}{2}}3+\log_{\frac{\sqrt{6}}{6}}6=0$.

(Р: а) x=6; б) x=1; в) $x=\sqrt{2}$; г) x=2)

17. Ријешити неједначине:

а) $\log_2\left(x^2-x-\frac{3}{4}\right)<\log_2 5-2$

б) $\log_x\frac{3x-1}{x^2+1}>0$

в) $\log \dfrac{\left|x^2-2x\right|+4}{\left|x+2\right|+x^2} \le 0$.

(Р: а) $x \in \left(-1,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2},2\right)$; б) $x \in \left(\frac{1}{3},1\right) \cup (1,2)$; в) $[\frac{1+\sqrt{7}}{4},+\infty)$)

18. Ријешити систем једначина

$$\log x + \log y = 2$$
$$\log\sqrt{5(x-5)} - \log\sqrt{3y-2} = 0.5.$$

(Р: (25,4))

19. Ријешити систем једначина

$$2^{x+y-1} + 2^{x-y+1} = 3$$
$$\frac{1}{7}3^{x\log_3 2 + y\log_3 2 - 2} + 3^{x\log_3 2 - y\log_3 2 - 2} = \frac{1}{7}$$

(Р: (1/2,1/2))

20. Доказати идентитет

$$3\left[\sin^4\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\sin^4(3\pi+x)\right]-2\left[\sin^6\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin^6(5\pi-x)\right]=1.$$

21. Упростити израз

$$\frac{1+tgx\cdot tg\frac{x}{2}}{ctg\frac{x}{2}+tg\frac{x}{2}}$$

(Р: $\frac{1}{2}tgx$)

22. Ријешити једначине:

а) $3\sin^2 x-\left(3+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$ (Р: $x=\frac{\pi}{6}+k\pi, x=\frac{\pi}{4}+k\pi$,$k\in$Z)

б) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=-1$,

(Упутство: смјена: $tg\frac{x}{2}=t$) (Р: $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, x=(2k+1)\pi, k\in Z$)

в) $1-\cos(\pi-x)+\sin\frac{\pi+x}{2}=0$ (Р: $x=\pi+2k\pi, x=\pm\frac{4\pi}{3}+4k\pi$, $k\in$Z)

г) $tg2x-ctg3x=0$ (Р: $x=(2k+1)\frac{\pi}{10}$, $k\in$Z)

д) $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin 3x$ (Р: $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ x=\frac{3\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}$)

ђ) $16^{\sin x}=\sqrt[\cos x]{4}$ (Р: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$)

е) $\log_{\cos x}(\sin x)+\log_{\sin x}(\cos x)-2=0$. (Р: $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$)

23. Ријешити неједначине:

а) $\cos^2 x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\cos x<\frac{\sqrt{3}}{4}$ (Р: $\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,-\frac{5\pi}{6}+2k\pi<x<-\frac{\pi}{3}+2k\pi$)

б) $6\cos^2 x-11\cos x+4>0$. (Р: $\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi$)