Test broj 1

1. a) Izračunati $\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}:\frac{9}{5}\right):1\frac{7}{30}\right)^{-2}+\log_2 0{,}0625.$

   b) Uprostiti $\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y\cdot(x-y)^2}{x^4-y^4}.$

2. Rješiti jednačine:

   a) $\frac{2x+1}{5}-\frac{x+2}{4}=\frac{5x+2}{3}-2x$

   b) $(f(x))^2+f(x)=0,$ ako je $f(x)=\left\{\begin{matrix} x+1, x<2 \\ x-1, x\geq 2\end{matrix}\right\}.$

3. Rješiti trigonometrijsku jednačinu: $\cos^2 x-3\sin x\cos x=-1$.

4. Rješiti nejednačinu: $x^{\log_2^2 x-3\log_2 x+1}<8$.

5. Nađi jednačine zajedničkih tangenti parabole $y^2=8x$ i kružnice $x^2+y^2=2$.

6. Izračunati obim i površinu jednakokrakog trapeza opisanog oko kruga, ako je dužina veće osnovice 3 cm, a jedan njegov unutrašnji ugao 60°.

7. Površina prave kupe je 96π cm^2, a dužina izvodnice je 10 cm. Izračunati zapreminu kupe.

8. Zbir svih članova beskonačne geometrijske progresije je 16, a zbir kvadrata članova te iste progresije je 153,6. Nađi peti član i količnik te progresije.

9. Izračunati $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 80^\circ$.

10. Od 5 oficira, 4 podoficira i 10 vojnika treba formirati grupu od 4 osobe u kojoj će biti bar po jedan oficir i podoficir. Na koliko načina je to moguće učiniti?

Rješenje testa broj 1

1. a)

$$\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}:\frac{9}{5}\right):1\frac{7}{30}\right)^{-2}+\log_2 0{,}0625=$$

$$=\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}:\frac{9}{5}\right)\cdot\frac{30}{37}\right)^{-2}+\log_2(0{,}25)^2=\left(\frac{12+25}{60}\cdot\frac{30}{37}\right)^{-2}+2\cdot\log_2 0{,}5^2=$$

$$=\left(\frac{37}{60}\cdot\frac{30}{37}\right)^{-2}+2\cdot 2\log_2 2^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+4\cdot(-1)=4-4=0.$$

b)

$$\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y\cdot(x-y)^2}{x^4-y^4}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y\cdot(x-y)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}=$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y\cdot(x-y)}{(x+y)(x^2+y^2)}=$$

$$=\frac{x(x+y)-y(x-y)}{(x+y)(x^2+y^2)}=\frac{x^2+xy-xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}=\frac{1}{x+y},$$

uz uslov $x \neq -y \wedge x \neq y$.

2. a) Ako se data jednačina pomnoži sa NZS (3,4,5), tj. sa 60, dobija se:

$$\frac{2x+1}{5}-\frac{x+2}{4}=\frac{5x+2}{3}-2x \Leftrightarrow 12(2x+1)-15(x+2)=20(5x+2)-120x$$

$$\Leftrightarrow 9x-18=-20x+40$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

b) Ako je $x < 2$, jednačina glasi $(x+1)^2+(x+1)=0.$ Tada je:

$$(x+1)^2+(x+1)=0 \wedge x<2 \Leftrightarrow x^2+3x+1=0 \wedge x<2$$

$$\Leftrightarrow (x=-1 \vee x=-2) \wedge x<2$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=-2$$

Ako je $x \geq 2$, jednačina glasi $(x-1)^2+x-1=0.$ Tada je:

$$(x-1)^2+(x-1)=0 \wedge x\geq 2 \Leftrightarrow x^2-x=0 \wedge x\geq 2$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \vee x=1) \wedge x\geq 2$$

$$\Leftrightarrow x \in \Theta \text{ (nema rješenja).}$$

Rješenja jednačine su: $x = -1$ ili $x = -2$.

3.) Za $\cos x = 0$ ili $\sin x = 0$, tj. za $x = k\cdot\frac{\pi}{2}, k \in Z$ jednačina je nemoguća.

Dalje, data jednačina je ekvivalentna sa :

$$\cos^2 x - 3\sin x\cos x = -1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x + 1 - 3\sin x\cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - 3\sin x\cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \sin^2 x - 3\sin x\cos x = 0$$
(dijeljenjem sa $\cos^2 x \neq 0$)
$$\Leftrightarrow 2 + tg^2 x - 3tgx = 0$$
$$\Leftrightarrow tgx = t \ \wedge\ t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow tgx = t \ \wedge (t = 2 \vee t = 1)$$
$$\Leftrightarrow tgx = 2 \vee tgx = 1$$
$$\Leftrightarrow x = arctg2 + k\pi,\ k \in Z \quad \vee\ x = \frac{\pi}{4} + l\pi,\ l \in Z.$$

4.) Nejednačina $x^{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 1} < 8$ ima smisla za x > 0. Ako uvedemo smjenu $\log_2 x = t$, onda je $x = 2^t$, pa dobijamo:

$$\left(2^t\right)^{t^2-3t+1} < 8$$
$$\Leftrightarrow 2^{t^3-3t^2+t} < 2^3$$
$$\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + t < 3$$
$$\Leftrightarrow t^2(t-3) + (t-3) < 0$$
$$\Leftrightarrow (t-3)\cdot\left(t^2+1\right) < 0$$
$$\Leftrightarrow t < 3$$

Prema tome, $\log_2 x < 3$, tj. $\log_2 x < \log_2 2^3$, odakle slijedi da je x < 8 i kako je x > 0, skup rješenja nejednačine je interval (0,8).

5.) Uslov dodira prave $y = kx + n$ i kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ je $\left(1+k^2\right)\cdot r^2 = n^2$. Uslov dodira prave $y = kx + n$ i parabole $y^2 = 2px$ je $p = 2kn.$ Kako je $r^2 = 2$ i $p = 4$ rješavanjem sistema

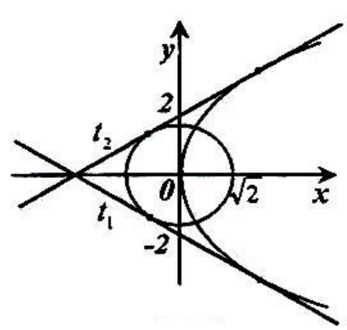
$$\left.\begin{array}{l}\left(1+k^2\right)\cdot 2 = n^2 \\ 4 = 2kn\end{array}\right\}$$ dobija se da je

$n = 2$ i $k = 1$ ili $n = -2$ i $k = -1$.

Prema tome, jednačine traženih zajedničkih tangenti su:

$t_1 : y = x + 2$

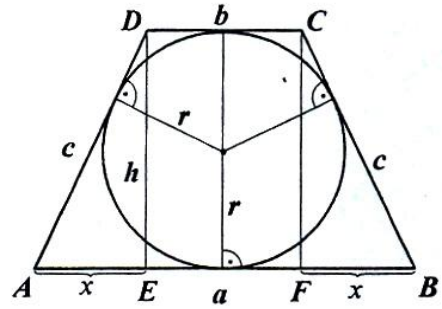
$t_2 : y = -x - 2.$



Slika 1.

6.) Neka je E podnožje visine h iz tjemena D (Slika 2). Tada je AE = x i $c \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{c}{2}$

Trapez je jednakokraki, pa je $x = \dfrac{a-b}{2}$, odnosno $\dfrac{c}{2} = \dfrac{a-b}{2}$, a kako je trapez tangentni to je $2c = a + b$.



Slika 2.

Dakle, $2c = a + b$, $\dfrac{c}{2} = \dfrac{a-b}{2}$ i $a = 3$, odakle je

$$\left.\begin{matrix} 2c = 3 + b \\ c = 3 - b \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 6 - 2b = 3 + b \\ c = 3 - b \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 3 = 3b \\ c = 3 - b \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} b = 1 \\ c = 2 \end{matrix}\right\}.$$

Visinu h dobijamo iz pravouglog trougla AED:

$$h = c \cdot \sin 60^\circ = \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

To znači da je obim trapeza $O = 2c + a + b = 2 \cdot 2 + 3 + 1 = 8\ cm,$

a površina trapeza je $P = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = \dfrac{3+1}{2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ cm^2.$

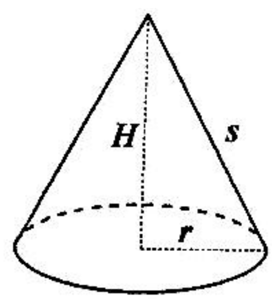
7.) Na osnovu formule za površinu kupe

$P = B + M = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$

dobijamo da je $96 \cdot \pi = \pi \cdot r \cdot (r + 10)$,

odnosno, da je

$r^2 + 10r - 96 = 0$ i $r = 6.$



Slika 3.

Kako je $H^2 = s^2 - r^2$, to je $H = 8\,cm.$

Zapreminu kupe izračunavamo po formuli

$V = \dfrac{1}{3} B \cdot H$, pa je $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8$

tj. $V = 96\pi\ cm^3$.

8.) Prema uslovu zadatka je $a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... = 16$ i $|q| < 1$, jer progresija ima sumu. Kvadrati članova geometrijske progresije obrazuju, takođe geometrijsku progresiju sa količnikom q^2, $0 < q^2 < 1$ i prvim članom a_1^2 za koju je

$a_1^2 + a_1^2 q^2 + a_1^2 q^4 + ... = 153{,}6.$

Zbir svih članova progresije izračunava se po formuli

$S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$, pa iz $\dfrac{a_1}{1-q} = 16$ i $\dfrac{a_1^2}{1-q^2} = 153{,}6$ slijedi :

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 16\cdot(1-q) \\ \dfrac{256\cdot(1-q)^2}{1-q^2} = 153{,}6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 16\cdot(1-q) \\ 256\cdot(1-q) = 153{,}6\cdot(1+q) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 16\cdot(1-q) \\ 102{,}4 = 409{,}6\cdot q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ q = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}.$$

Dakle, $q = \dfrac{1}{4}$ i $a_5 = a_1\cdot q^4 = 12\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^4 = \dfrac{12}{256} = \dfrac{3}{64}$.

9.) Znajući da je $\cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$ i $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, dobijamo da je

$$\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 80^\circ = \frac{\sin 40^\circ}{2\cdot\sin 20^\circ}\cdot\frac{\sin 80^\circ}{2\cdot\sin 40^\circ}\cdot\frac{\sin 120^\circ}{2\cdot\sin 60^\circ}\cdot\frac{\sin 160^\circ}{2\cdot\sin 80^\circ} =$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin 120^\circ}{\sin 60^\circ}\cdot\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin(180^\circ - 60^\circ)}{\sin 60^\circ}\cdot\frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{16}.$$

10. Moguće sastave grupe prikažimo pomoću skupova (jer redosled nije bitan):
$\{O,O,O,P\}$, $\{O,O,P,P\}$, $\{O,P,P,P\}$, $\{O,P,V,V\}$, $\{O,P,P,V\}$, $\{O,O,P,V\}$,
gdje O označava oficira, P podoficira, i V vojnika.

Od 5 oficira možemo izabrati 3 oficira na $\dbinom{5}{3} = \dfrac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$ načina.

Četvrti član grupe mora biti podoficir, za čiji izbor imamo $\dbinom{4}{1} = \dfrac{4}{1} = 4$ mogućnosti.

Svakom izboru 3 oficira od 5 oficira odgovaraju 4 izbora podoficira pa za ovu kombinaciju imamo $10\cdot4 = 40$ moguća načina formiranja grupe. Slično rasuđivanje primjenjuje se i u ostalim slučajevima. Ukupan broj traženih načina je:

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{1} + \binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2} + \binom{5}{1}\cdot\binom{4}{3} + \binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{10}{2} + \binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{10}{1} + \binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{10}{1} =$$

$$= 40 + 60 + 20 + 900 + 300 + 400 = 1720.$$

Test broj 2

1.) a) Izračunati $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\frac{1}{\sqrt{6}+11}$.

b) Uprostiti $\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{a^2-ab}$.

2.) Riješiti jednačine: a) $\frac{x-1}{2}+\frac{3x-1}{4}=\frac{2x-4}{3}+\frac{x+1}{6}$,

b) $\left(x^2-4x\right)^2+12=7\left(4x-x^2\right)$.

3.) Riješiti trigonometrijsku jednačinu: $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}$.

4.) Riješiti nejednačinu: $\log_3(3-x)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{4}$.

5.) Tačka A (3,0) polovi tetivu kružnice $x^2+y^2-4x+2y+1=0$.
Odrediti jednačinu prave kojoj pripada tetiva navedene kružnice.

6.) Stranice trougla su a = 13, b = 14 i c = 15. Dvije od njih (a i b) su tangente kruga, čiji je centar na trećoj stranici. Odrediti poluprečnik kruga.

7.) Izvodnica prave zarubljene kupe je s = 5 cm, a poluprečnici osnova su R = 5 cm i r = 2 cm. U kupu je upisana pravilna zarubljena četvorostrana piramida tako da je donja osnova piramide upisana u donju osnovu kupe, a gornja osnova piramide u gornju osnovu kupe. Izračunati zapreminu zarubljene piramide.

8.) Odrediti dužine stranica trougla, ako se zna da one obrazuju aritmetičku progresiju sa razlikom d = 4 i ako jedan unutrašnji ugao trougla ima 120º.

9.) Data je funkcija $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\in(-1,1) \\ \frac{1}{2}\ln x^2, & x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty) \end{cases}$

a) Skicirati grafik funkcije *f*.
b) U zavisnosti od realnog parametra *a*, odrediti broj realnih rješenja jednačine $|f(x)|=a$.

10.) Izračunati granične vrijednosti:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log_2 2+\log_2 4+...+\log_2 2^n}{n^2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$

Rješenje testa broj 2

1. a)

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\frac{1}{\sqrt{6}+11}=$$
$$=\left(\frac{15\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1}+\frac{4\cdot\left(\sqrt{6}+2\right)}{6-4}-\frac{12\cdot\left(3+\sqrt{6}\right)}{9-6}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$
$$=\left[3\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)+2\cdot\left(\sqrt{6}+2\right)-4\left(3+\sqrt{6}\right)\right]\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$
$$=\left(\sqrt{6}-11\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=6-121=-115.$$

b)

$$\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{a^2-ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^2}{b\cdot(a-b)}+\frac{b^2}{a\cdot(a-b)}=$$
$$=\frac{\left(a^2+b^2\right)(a-b)-a^3+b^3}{ab\cdot(a-b)}=\frac{a_3+ab^2-a^2b-b^3-a^3+b^3}{ab\cdot(a-b)}=$$
$$=\frac{ab\cdot(b-a)}{ab\cdot(a-b)}=-1,\quad \text{uz uslov } a\neq 0,\ b\neq 0 \text{ i } a\neq b.$$

2. a) Ako datu jednačinu pomnožimo sa NZS (2,3,4,6), tj. sa 12, dobijamo:

$$\frac{x-1}{2}+\frac{3x-1}{4}=\frac{2x-4}{3}+\frac{x+1}{6}\Leftrightarrow 6\cdot(x-1)+3\cdot(3x-1)=4\cdot(2x-4)+2\cdot(x+1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 15x-9=10x-14\Leftrightarrow 5x=-5\Leftrightarrow x=-1.$$

b) Ako uvedemo smjenu $x^2-4x=t$, dobijamo da je:

$$\left(x^2-4x\right)^2+12=7\cdot\left(4x-x^2\right)\Leftrightarrow x^2-4x=t\wedge t^2+7t+12=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x=t\wedge(t=-3\vee t=-4)\Leftrightarrow x^2-4x=-3\vee x^2-4x=-4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\vee x^2-4x+4\Leftrightarrow x=3\vee x=1\vee x=2.$$

3.) Koristeći identitete:

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right),$$
$$a^4-a^2b^2+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-3a^2b^2,$$
$$2\sin x\cos x=\sin 2x \text{ i}$$
$$\sin^2 x=1-\cos^2 x,$$

transformišemo lijevu stranu jednačine na sledeći način:

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \left(\cos^2 x\right)^3 + \left(\sin^2 x\right)^3 =$$
$$= \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\left(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x\right) =$$
$$= 1 \cdot \left[\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 - 3\cos^2 x \sin^2 x\right] = 1 - 3 \cdot \frac{4\sin^2 x \cos^2 x}{4} =$$
$$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\left(1 - \cos^2 2x\right).$$

Data jednačina sada ima oblik $1 - \frac{3}{4}\left(1 - \cos^2 2x\right) = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2}$, odakle se sređivanjem dobija ekvivalentna jednačina, odnosno $2\cos^2 2x - 5\cos 2x + 2 = 0$. Uvođenjem smjene $\cos 2x = t$ dobija se jednačina $2t^2 - 5t + 2 = 0$, čija su rješenja $t = 2$ ili $t = \frac{1}{2}$. Jednačina $\cos 2x = 2$ je nemoguća, a jednačina $\cos 2x = \frac{1}{2}$ ima rješenja $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z.$

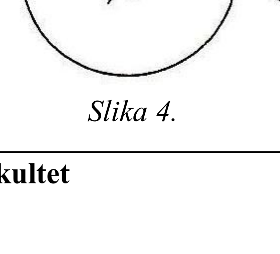
4.) Nejednačina $\log_3(3 - x) < \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{4}$ ima smisla ako je $3 - x > 0$ i $\frac{x+1}{4} > 0$, odnosno ako je $x \in (-1,3)$. Kako je $\log_{\frac{1}{n}} a = -\log_n a$ biće da je

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{4} = -\log_3 \frac{x+1}{4} = \log_3 \left(\frac{x+1}{4}\right)^{-1} = \log_3 \frac{4}{x+1}.$$

Osnova logaritma je veća od 1, pa je logaritamska funkcija rastuća, a nejednačina $\log_3(3 - x) < \log_3 \frac{4}{x+1}$ se svodi na nejednačinu $3 - x < \frac{4}{x+1.}$ Odavde dobijamo da je $3 - x - \frac{4}{x+1} < 0$, odnosno $\frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} > 0$ ili $\frac{(x-1)^2}{x+1} > 0.$
Rješenja poslednje nejednačine su svi brojevi veći od -1 i različiti od 1. Ako uzmemo u obzir da je $x \in (-1,3)$, konačno rješenje date nejednačine je $x \in (-1,1) \cup (1,3).$

5.) Kanonski oblik jednačine kruga je $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4.$ Centar kruga je tačka C (2,-1), a poluprečnik je $r = 2$. Jednačina prave *l*, određene tačkama A i C, prema formuli $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, glasi $y - 0 = \frac{-1-0}{2-3}(x - 3)$, odnosno $y = x - 3.$

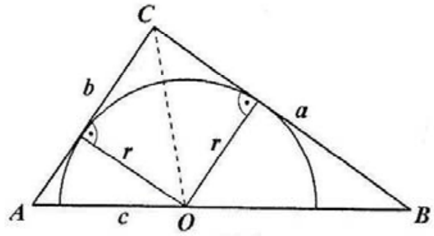
Prava *l* i prava *p*, kojoj pripada tetiva, su ortogonalne, što slijedi iz podudarnosti trouglova *PAC* i *QAC* (Slika 4.). Koeficijent pravca prave *l* je $k_l = 1$, a prave *p* je k_p. Iz uslova ortogonalnosti pravih $k_l \cdot k_p = -1$ sledi da je $k_p = -1$. Jednačina prave *p* kojoj pripada tačka A(3,0) sa koeficijentom pravca $k_p = -1$ je $y - 0 = -1 \cdot (x - 3)$, odnosno $y = -x + 3$.



Slika 4.

6.) Kako su poznate sve tri stranice trougla njegovu površinu možemo izračunati na osnovu Heronovog obrasca $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, pri čemu je $s=\frac{a+b+c}{2}$ poluobim trougla čije su stranice *a, b* i *c*.

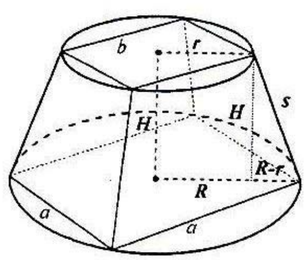
U ovom zadatku je $s=21$ pa je $P_{ABC}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=84$. Na osnovu uslova zadatka, površinu trougla ABC možemo dobiti i kao zbir površina trouglova *AOC* i *BOC*, gdje je *O* centar upisanog polukruga (Slika 5.).



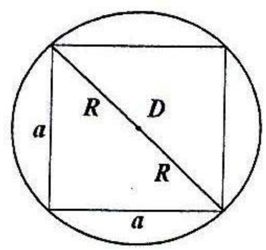
Slika 5.

Dakle, $P_{ABC}=P_{AOC}+P_{BOC}$, odnosno $P_{ABC}=\frac{br}{2}+\frac{ar}{2}$, odakle je $\frac{r}{2}(13+14)=84$, pa je $r=\frac{56}{9}$.

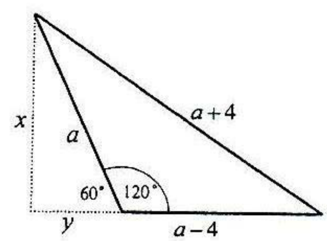
7.) Na osnovu Pitagorine teoreme (Slika 6.) dobijamo da je $H^2=s^2-(R-r)^2$, tj. $H=4$. Prečnik donje osnove zarubljene kupe je *2R* , a kako je i dijagonala *D* donje osnove upisane zarubljene piramide takođe jednaka *2R* (Slika 7.), to će biti $D=2R=10=a\sqrt{2}$, pa je $a=5\sqrt{2}$. Slično se iz $d=2r=4=b\sqrt{2}$ dobija da je $2\sqrt{2}$.



Slika 6.



Slika 7.



Slika 8.

Površine baza zarubljene piramide su:

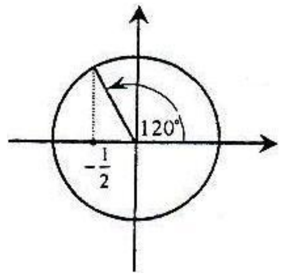
$B_1=a^2=50\,cm^2$ i $B_2=b^2=8\,cm^2$, pa je zapremnina zarubljene piramide

$$V=\frac{H}{3}\left(B_1+\sqrt{B_1\cdot B_2}+B_2\right)=\frac{4}{3}\left(50+\sqrt{50\cdot 8}+8\right)=104\,cm^3.$$

8.) Neka su stranice trougla $a, b=a-4$ i $c=a+4$. Sa slike 8. vidi se da je $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $y=\frac{a}{2}$. Prema Pitagorinoj teoremi je:

$$x^2+(y+a-4)^2=(a+4)^2 \text{ pa je } \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}+a-4\right)^2=(a+4)^2,$$

odakle se sređivanjem dobija jednačina $2a^2-20a=0$, čija su rješenja $a=0$ ili $a=10$.
Dakle stranice trougla su: $a=10$, $b=6$ i $c=14$.



Slika 9.

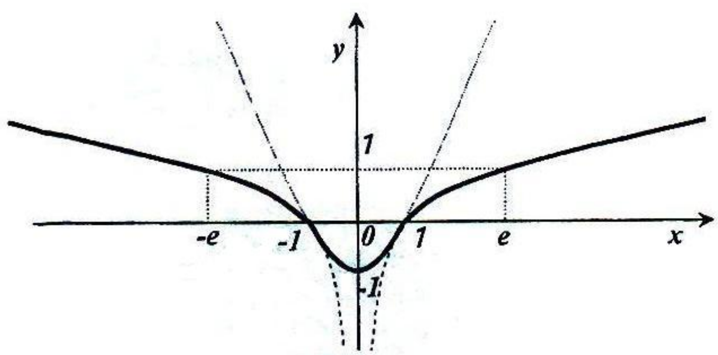
Do jednačine $2a^2 - 20a = 0$ smo mogli doći i na drugi način.
Na osnovu kosinusne teoreme važi (Slika 8.):
$(a+4)^2 = a^2 + (a-4)^2 - 2a(a-4)\cos 120^\circ$.
Kako je $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ (Slika 9.) sređivanjem prethodne jednačine dobija se jednačina $2a^2 - 20a = 0$.

9.) Kako je $\frac{1}{2}\ln x^2 = \ln\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{x^2} = \ln|x|$ i $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

funkcija f biće zadata formulom

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x), & x \leq -1 \\ x^2 - 1, & x \in (-1,1) \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$$

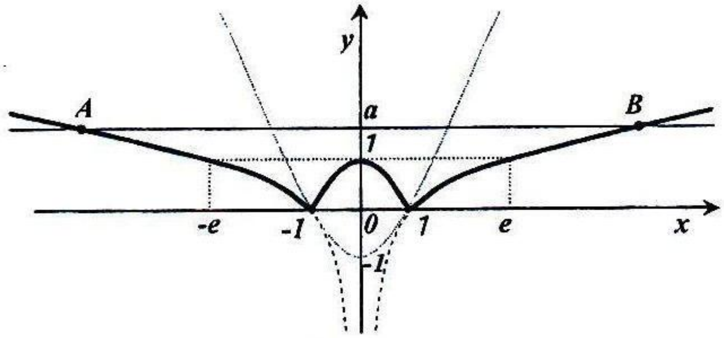
Grafik funkcije prikazan je na slici 10.



Slika 10.

U istom koordinatnom sistemu, na slici 11, predstavljeni su grafici funkcija

$$g(x) = a \quad a \in R \quad \text{i} \quad |f(x)| = \begin{cases} \ln(-x), & x \leq -1 \\ -\left(x^2 - 1\right), & x \in (-1,1) \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$$



Slika 11.

Apscise zajedničkih tačaka grafika funkcija $|f|$ i g predstavljaće rješenja date jednačine. Na slici 11 to su tačke A i B. To znači za $a<0$ jednačina nema rješenja, za $a\in(1,\infty)\cup\{0\}$ ima 2 rješenja, za $a=1$ jednačina ima tri rješenja, za $a\in(0,1)$ jednačina ima 4 rješenja.

10. a)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_2 2+\log_2 4+\ldots+\log_2 2^n}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_2\left(2\cdot4\cdot8\cdot\ldots\cdot2^n\right)}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_2\left(2^{1+2+3+\ldots+n}\right)}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+2+3+\ldots+n)\log_2 2}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3-1^3}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}=\frac{1}{3}.$$

Test broj 3

1.) a) Šta je veće: 13 % od 200 ili 30 % od 90?

b) Uprostiti izraz $\dfrac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\cdot\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)^{-1}:\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^2-b^2}$.

2.) Riješiti jednačine:

a) $x-\dfrac{1+\frac{3}{4}x}{4}+\dfrac{5-\frac{2}{3}x}{4}=\dfrac{3-\frac{x}{2}}{3}$ b) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2\cdot|x|\right)=-1$

3.) Dokazati identitet $3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha$.

4.) Riješiti nejednačinu $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\leq\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$.

5.) Odrediti jednačinu tangenti elipse $x^2+4y^2=100$ povučenih iz tačke A (2,7).

6.) Dijagonale jednakokrakog trapeza su uzajamno normalne. Izračunati njegovu površinu ako je krak $c=2\sqrt{5}\ cm$, a odnos osnovica je 3:1.

7.) Osnova piramide je trougao čije su stranice $a=12\ cm$, $b=16\ cm$ i $c=20\ cm$, a bočne ivice su jednake i imaju dužinu 26 *cm*. Izračunati zapreminu piramide.

8.) Deveti član aritmetičke progresije je pet puta veći od drugog člana, a pri dijeljenju trinaestog člana sa šestim članom dobija se količnik 2 i ostatak 5. O kojoj progresiji je riječ?

9.) Odrediti najmanju i najveću vrijednost funkcije

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leq 0\\ -x^2+8x+1, & x>0\end{cases}$$ na segmentu [-1,8].

10.) Skicirati grafike funkcija:

a) $y=2|\sin x|$; b) $y=\cos\dfrac{x}{2}$; c) $y=\log_2 2x$; d) $y=\dfrac{1}{|x|}$.

Rješenje testa broj 3

1\. a) $200\cdot\frac{13}{100}=26<27=90\cdot\frac{30}{100}.$

b)

$$\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^{-1}:\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^2-b^2}=\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=$$

$$=\frac{\frac{b^2+a^2}{a^2b^2}}{\frac{a+b}{ab}}\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}\cdot\frac{(a-b)(a+b)}{\frac{b-a}{ab}}=\frac{b^2+a^2}{ab(a+b)}\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}\cdot\frac{(a-b)(a+b)\cdot ab}{-(a-b)}=-ab$$

uz uslov $ab\neq 0,\ \ a\neq -b,\ a\neq b.$

2\. a) Ako jednačinu $x-\frac{1+\frac{3}{4}x}{4}+\frac{5-\frac{2}{3}x}{4}=\frac{3-\frac{x}{2}}{3}$ pomnožimo sa NZS (3,4), tj, sa 12, dobijamo ekvivalentnu jednačinu $12x-3\left(1+\frac{3}{4}x\right)+3\left(5-\frac{2}{3}x\right)-4\left(3-\frac{x}{2}\right)=0$ odakle sređivanjem dobijamo da je $\frac{39}{4}x=0$, odnosno da je $x=0.$

b) Jednačina ima smisla za $x^2+2|x|>0$, tj. za $x\neq 0$ i kako je

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}\quad \text{biće}\quad \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2|x|\right)=-1\Leftrightarrow x^2+2|x|=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2x-3=0\wedge x>0\right)\vee\left(x^2-2x-3=0\wedge x<0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left((x=1\vee x=-3)\wedge x>0\right)\vee\left((x=3\vee x=-1)\wedge x<0\right)\Leftrightarrow x=1\vee x=-1.$$

3.) Koristeći formule:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2,$$ dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
&3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=\\
&=3+4\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\\
&=3+4\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)^2-\left(2\sin\alpha\cos\alpha\right)^2\\
&=3\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+4\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\
&=7\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\
&=7\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\
&=7\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\
&=8\cos^2\alpha-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\
&=8\cos^2\alpha\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)\\
&=8\cos^2\alpha\cos^2\alpha\\
&=8\cos^4\alpha.
\end{aligned}
$$

4.) Zadatak ima smisla, ako je $x\neq -1$. Tada je:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^{x}\Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right)^{x}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}\Leftrightarrow$$

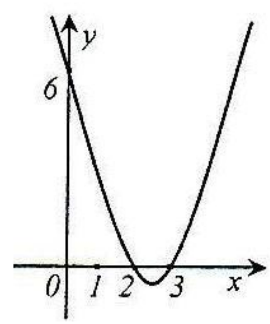
(osnova eksponencijalne funkcije je >1)

$$\Leftrightarrow\frac{6x-6}{x+1}\le x\Leftrightarrow\frac{6x-6-x^2-x}{x+1}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-5x+6}{x+1}\ge 0\Leftrightarrow\frac{(x+2)(x+3)}{x+1}\ge 0\Leftrightarrow$$

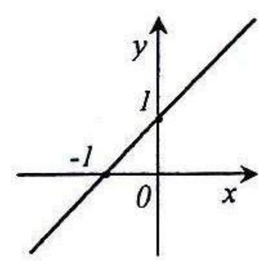
(vidjeti slike 12. i 13. i tablicu)

$$\Leftrightarrow x\in(-1,2]\cup[3,+\infty).$$



Slika 12.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,3)$	$(3,+\infty)$
x^2-5x+6	+	+	-	+
$x+1$	-	+	+	+
$\frac{x^2-5x+6}{x+1}$	-	+	-	+

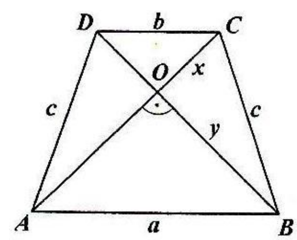


Slika 13.

5.) Neka je $y = kx + n$ jednačina tangente elipse $x^2 + 4y^2 = 100$, čiji je kanonski oblik $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$. Uslov dodira ove elipse i prave $y = kx + n$ je $100k^2 + 25 = n^2$.
Tačka A (2,7) pripada pravoj $y = kx + n$, pa je $7 = 2k + n$. Rješavanjem sistema jednačina $100k^2 + 25 = n^2 \wedge 7 = 2k + n$ dobijamo da je $k = \frac{3}{8}$ i $n = \frac{25}{4}$, ili da je $k = -\frac{2}{3}$ i $n = \frac{25}{3}$, pa su jednačine traženih tangenti:
$t_1 : 3x - 8y + 50 = 0$ i $t_2 : 2x + 3y - 25 = 0$.

6.) Trouglovi *ABO* i *CDO* su slični, jer su im odgovarajući uglovi jednaki, pa su im parovi odgovarajućih stranica proporcionalni. Kako je *AB:CD = OB:OC*, tj. *3:1= OB:OC*, biće *OB = 3OC*. Označimo duž *OB, OC* i *BC* redom sa *y, x* i *c*. (Slika 14.).
Trougao *BOC* je pravougli, pa je:
$$c^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^2 = x^2 + (3x)^2 \Leftrightarrow x^2 = 2$$
iz čega slijedi da je $x = \sqrt{2}$.

Dijagonale jednakokrakog trapeza su uzajamno normalne i jednake, pa ako označimo dijagonale *AC* i *BD* sa d, slijedi da je:



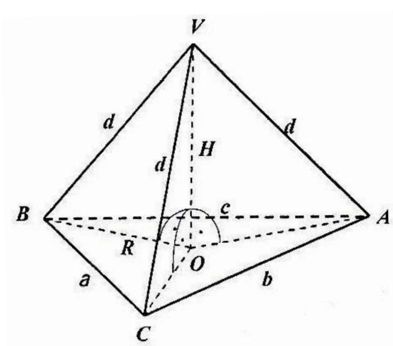
Slika 14.

$$P_{ABCD} = \frac{d^2}{2} = \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2} = 16\ cm^2.$$

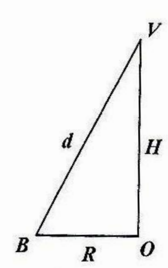
7.) Iz podudarnosti trouglova *VOB*, *VOC* i *VOA* (Slika 15.; podudarne su po dvije odgovarajuće stranice i ugao naspram veće od njih) zaključujemo da se podnožje visine piramide nalazi u centru opisanog kruga oko trougla *ABC*. Površina baze može se izračunati pomoću Heronovog obrasca:

$$B = P_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{24 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 4} = 96\ cm^2.$$

Kako je $P_\Delta = \frac{abc}{4R}$, to je $R = \frac{abc}{4P_\Delta} = \frac{12 \cdot 16 \cdot 20}{4 \cdot 96} = 10\ cm.$



Slika 15.



Slika 16.

Visinu piramide (Slika 16.) izračunavamo pomoću Pitagorine teoreme:

$$H=\sqrt{d^2-R^2}=\sqrt{26^2-10^2}=\sqrt{(26-10)\cdot(26+10)}=4\cdot 6=24.$$

Sada možemo izračunati zapreminu piramide:

$$V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\cdot 96\cdot 24=768\ cm^3.$$

Napomena:
Ako uočimo da je bazni trougao pravougli, jer je $12^2+16^2=20^2$, možemo koristiti formulu $R=\frac{c}{2}$.

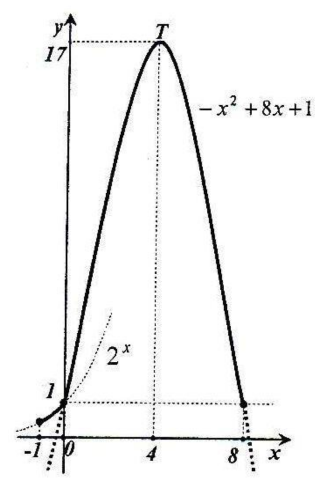
8.) Neka je a_1 prvi član, a d razlika date aritmetičke progresije.
Prema uslovu zadatka slijedi da je:

$$\left.\begin{aligned}a_9&=5\cdot a_2\\ a_{13}&=2\cdot a_6+5\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}a_1+8d&=5\cdot(a_1+d)\\ a_1+12d&=2a_1+10d+5\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}3d&=4a_1\\ 2d-5&=a_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}3d&=4\cdot(2d-5)\\ a_1&=2d-5\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}d&=4\\ a_1&=3\end{aligned}\right\}.$$

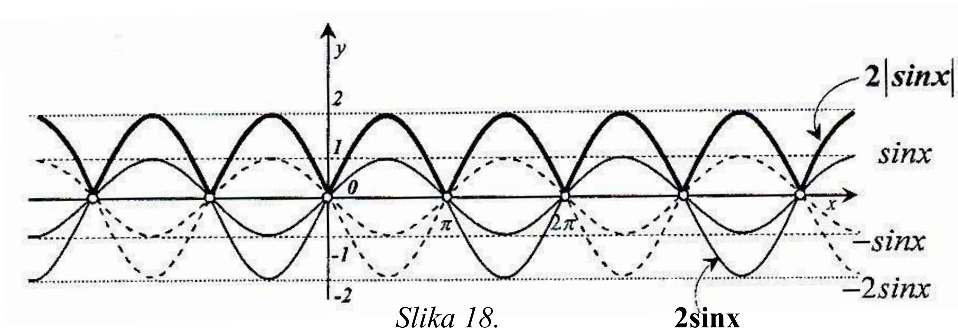
Prvih nekoliko članova progresije je : 3, 7, 11, 15, 19,... .

9.) Funkcija $y=2^x$ je rastuća i $f(-1)=\frac{1}{2},\ \ f(0)=1$.
Koordinate tjemena parabole $y=-x^2+8x+1$ su: $x_T=\frac{-b}{2a}=4$ i $y_T=\frac{-D}{4a}=17$.
Grafik funkcije je prikazan na slici 17.
Najmanja vrijednost funkcije je $\frac{1}{2}$ i postiže se u tački $x=-1$, a najveća vrijednost funkcije je 17 i postiže se u tački $x=4$.



Slika 17.

10. a) $$y = 2 \cdot |\sin x| = \begin{cases} 2 \cdot \sin x, & \sin x \geq 0 \\ -2 \cdot \sin x, & \sin x < 0 \end{cases}$$

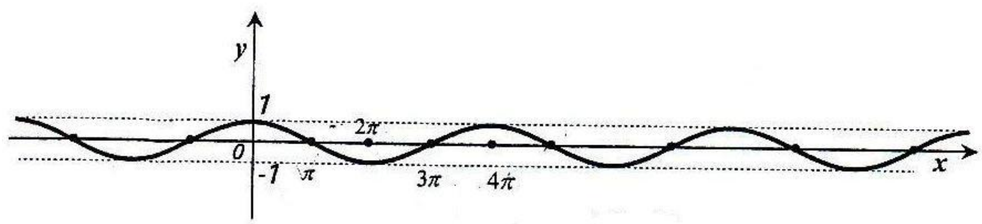


Slika 18.

b) Osnovni period funkcije $y = \cos\frac{x}{2}$ je $T = \frac{2\pi}{\varpi} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	π
y	1	0	-1	0	1

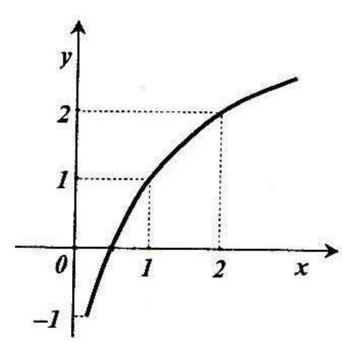
Grafik funkcije prikazan je na slici 19.



Slika 19.

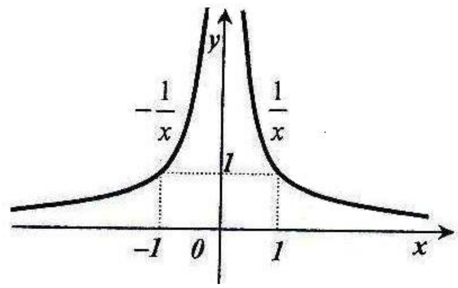
c) $y = \log_2 2x, \quad x > 0$

x	1/4	1/2	1	2	4
y	-1	0	1	2	3



Slika 20.

d) $$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ -\dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$$



Slika 21.

Test broj 4

1. a) Izračunati: $2^{2^{-2}} : 2^{-2^{-2}}$.

b) Za a = 0,003 i b = 5,994 odrediti vrijednost izraza
$$I(a,b)=\left(\frac{1}{a-3b}-\frac{1}{a+3b}+\frac{6b}{a^2-9b^2}\right):\frac{b\cdot(2a+b)}{a^2-9b^2}.$$

2.) Rješiti jednačine

a) $\frac{2x+1}{7}-\frac{3x-2}{3}=\frac{4x+5}{21}-\frac{1}{3}$;

b) $(f(x))^2+f(x)=0$ ako je $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x\geq 1\\ x-1, & x<1\end{cases}$.

3.) Rješiti trigonometrijsku jednačinu $\sin^2 2x+\sin^2 3x=1$.

4.) Za koje vrijednosti realnog parametra k jednačina $(k-2)\cdot x^2-2kx+k-1=0$ ima pozitivna rješenja?

5.) Na krivoj $3x^2-4y^2=72$ odrediti tačku najbližu pravoj $3x+2y+1=0$.

6.) U trouglu ABC je $BC=5$, $AC=8$, $\angle BAC=30^\circ$ i $\angle ABC<90^\circ$. Odrediti AB.

7.) Izračunati zapreminu prave zarubljene kupe ako su površine njenih osnova $25\pi\ cm^2$ i $4\pi\ cm^2$, a površina omotača $35\pi\ cm^2$.

8.) Hipotenuza jednakokrakog pravouglog trougla je 1. Nad njegovom katetom, kao nad hipotenuzom, konstruisan je novi jednakokraki pravougli trougao. Nad katetom novog trougla, kao nad hipotenuzom, konstruisan je opet, jednakokraki pravougli trougao, itd do beskraja. Koliki je zbir površina svih tako dobijenih trouglova (uključujući i polazni)?

9.) Rješiti sistem jednačina $\left.\begin{aligned}\log_y x+\log_x y=2\\ x^2-y=2\end{aligned}\right\}$.

10.) U xOy - ravni za $k\in R$ skicirati linije određene jednačinama:

a) $y=x+k$ b) $x^2+y|y|=1$ c) $y=kx^2-2kx+k+1$.

Rješenje testa broj 4

1\. a) $2^{2^{-2}} : 2^{-2^{-2}} = 2^{\frac{1}{4}} : 2^{-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$

b)

$$I(a,b) = \left(\frac{1}{a-3b} - \frac{1}{a+3b} + \frac{6b}{a^2-9b^2} \right) : \frac{b\cdot(2a+b)}{a^2-9b^2} = \frac{a+3b-(a-3b)+6b}{a^2-9b^2} \cdot \frac{a^2-9b^2}{b\cdot(2a+b)} =$$

$$= \frac{12b}{b(2a+b)} = \frac{12}{2a+b}, \quad a \neq -\frac{b}{2}, \quad b \neq 0.$$

$$I(0{,}003\,;5{,}994) = \frac{12}{2\cdot 0{,}003 + 5{,}994} = \frac{12}{6} = 2.$$

2\. a) Ako jednačinu $\frac{2x+1}{7} - \frac{3x-2}{3} = \frac{4x+5}{21} - \frac{1}{3}$ pomnožimo sa NZS (7,3), tj. sa 21 dobijamo ekvivalentnu jednačinu $3\cdot(2x+1) - 7\cdot(3x-2) = 4x+5-7$, koja se sređivanjem svodi na jednačinu $-19x+19=0$, a njeno rješenje je $x=1$.

b) 1° Za $x \geq 1$, je $f(x) = \log_2 x.$

$$\log_2^2 x + \log_2 x = 0 \Leftrightarrow \log_2 x(\log_2 x + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x = 0 \vee \log_2 x = -1$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{2},$$

pa je, zbog uslova $x \geq 1$, jedino rješenje ove jednačine $x=1$.

2° Za $x<1$, je $f(x) = x-1$

$$(x-1)^2 + (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)((x-1)+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x-1=0 \vee \mathrm{x}=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=0,$$

pa je zbog uslova $x<1$, jedino rješenje ove jednačine je $x=0$.

Dakle, skup rješenja date jednačine je $\{0,1\}$.

3.) Koristeći identitete:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

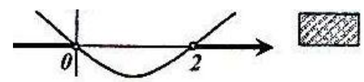
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

dobija se:

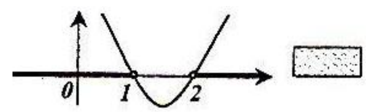
$$\sin^2 2x+\sin^2 3x=1\Leftrightarrow \frac{1-coc4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=1$$
$$\Leftrightarrow \cos 4x+\cos 6x=0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos5x\cdot\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow \cos5x=0\vee \cos x=0$$
$$\Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k\in Z\vee x=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ \ l\in Z$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5},\ \ k\in Z\vee x=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ \ l\in Z.$$

4.) Da bi rješenja x_1 i x_2 jednačine $ax^2+bx+c=0$ bila pozitivna, treba da budu ispunjeni sledeći uslovi: $x_1+x_2>0,\quad x_1\cdot x_2>0$ i $D\geq 0$.

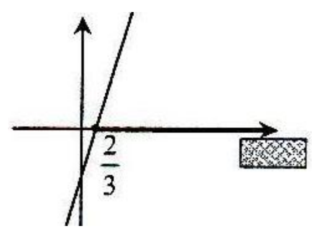
(1) $$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{2k}{k-2}>0,\ \text{tj. } 2k\cdot(k-2)>0$$
pa je $k\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.



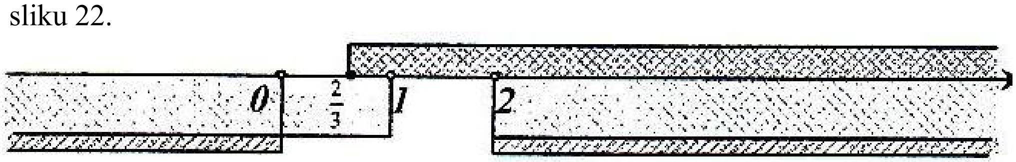
(2) $$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{k-1}{k-2}>0,\ \text{tj. } (k-1)(k-2)>0,$$
pa je $k\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)$.



(3) $$D=b^2-4ac=4k^2-4(k-2)(k-1)\geq 0,$$
$$4k^2-4k^2+12k-8\geq 0$$
$$4\cdot(3k-2)\geq 0\Rightarrow k\in\left[\frac{2}{3},\infty\right).$$



Presjek skupova rješenja uslova (1), (2) i (3) je traženo rješenje i nalazimo ga koristeći sliku 22.



Slika 22.

Prema tome,
$$k\in\left[\frac{2}{3},\infty\right)\wedge k\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)\wedge k\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)\Leftrightarrow k\in(2,\infty).$$

5.) Data kriva je hiperbola čiji je kanonski oblik $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1.$ Dodirna tačka hiperbole i njene tangente, paralelne datoj pravoj, biće tražena tačka. Data prava ima koeficijent pravca $k_p=-\frac{3}{2}.$ Tangenta mora biti paralelna sa pravom *p*, pa je $k_t=-\frac{3}{2}.$ Uslov dodira prave $y=kx+n$ i hiperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ je $a^2\cdot k^2-b^2=n^2.$

Iz jednačine $24\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-18=n^2$ dobija se da je $n=6$ ili $n=-6.$ Tangente hiperbole, paralelne pravoj *p* imaju jednačine:

$t_1: 3x+2y-12=0$ i $t_2: 3x+2y+12=0$

Rješavanjem sistema $\left.\begin{aligned}3x^2-4y^2&=72\\3x+2y-12&=0\end{aligned}\right\}$ i $\left.\begin{aligned}3x^2-4y^2&=72\\3x+2y+12&=0\end{aligned}\right\}$
dobijaju se tačke $P_1(6,-3)$ i $P_2(-6,3)$. Prema formuli za rastojanje tačke od prave slijedi:

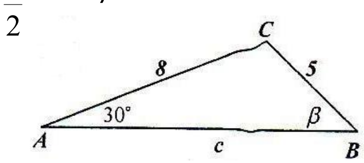
$$d(P_1,p)=\left|\frac{3\cdot6-2\cdot3+1}{\sqrt{9+4}}\right|=\frac{13}{\sqrt{13}} \quad \text{i} \quad d(P_2,p)=\left|\frac{-3\cdot6+2\cdot3+1}{\sqrt{9+4}}\right|=\frac{11}{\sqrt{13}}.$$

Dakle, tačka $P_2(-6,3)$ je tražena tačka.

6.) Na osnovu sinusne teoreme važi $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$, tj. $\frac{5}{\frac{1}{2}}=\frac{8}{\sin\beta}$ (Slika 23.).

Na osnovu implikacije

$$\sin\beta=\frac{4}{5}\wedge 0<\beta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\beta=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$$



Slika 23.

i na osnovu kosinusne teoreme važi

$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta,$ odnosno $64=25+c^2-2\cdot5\cdot c\cdot\frac{3}{5},$

odakle je $c^2-6c-39=0.$

Rješavanjem kvadratne jednačine i uzimajući u obzir da je $c>0$ proističe da je $c=3+4\sqrt{3}.$

7.) Kako je poznato da je $B_1=4\pi\ cm^2$ i $B_2=25\pi\ cm^2$, to se mogu odrediti poluprečnici baza: $r_1^2\pi=4\pi\Rightarrow r_1=2\ cm$ i $r_2^2\pi=25\pi\Rightarrow r_2=5\ cm.$

Sada, iz $M=35\pi\ cm^2$ može se odrediti izvodnica zarubljene kupe:
$\pi(r_1+r_2)\cdot s=35\pi\Rightarrow s=5\,cm.$

Pomoću Pitagorine teoreme nalazi se visina zarubljene kupe:

$$H=\sqrt{s^2-(r_2-r_1)^2}=\sqrt{25-9}=4\ cm.$$

Na osnovu poznatog obrasca za zapremninu zarubljene kupe slijedi da je:

$$V=\frac{H}{3}\left(B_1+\sqrt{B_1\cdot B_2}+B_2\right)=\frac{4}{3}\left(25\pi+\sqrt{25\pi\cdot 4\pi}+4\pi\right)=52\pi\ cm^3.$$

8.) $a_1^2+a_1^2=1\Rightarrow a_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, pa je $P_1=\dfrac{a_1^2}{2}=\dfrac{1}{4}$.

$a_2^2+a_2^2=a_1^2\Rightarrow a_2=\dfrac{a_1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$, pa je $P_2=\dfrac{a_2^2}{2}=\dfrac{1}{8}=P_1\cdot\dfrac{1}{2}$.

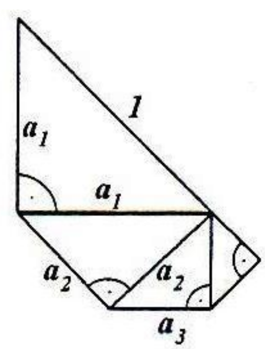
$a_3^2+a_3^2=a_2^2\Rightarrow a_3=\dfrac{a_2}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}}$, pa je $P_3=\dfrac{a_3^2}{2}=\dfrac{1}{16}=P_1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.

Indukcijom se može dokazati da je niz $P_1,P_2,P_3,...P_n,...$ geometrijski niz sa količnikom $q=\dfrac{1}{2}$.

Kako je $S_n=P_1+P_2+...P_n=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$,

prelaskom na graničnu vrijednost, kada se n neograničeno uvećava, dobijamo da je

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}.$$



Slika 24.

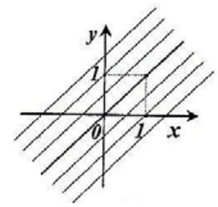
9.) Sistem ima smisla za $x>0,\ y>0,\ x\neq 1$ i $y\neq 1$.

$$\left.\begin{array}{r}\log_y x+\log_x y=2\\ x^2-y=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\log_y x+\dfrac{1}{\log_y x}=2\\ x^2-2=y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\log_y^2 x+1=2\log_y x\\ x^2-2=y\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}(\log_y x-1)^2=0\\ x^2-2=y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\log_y x=1\\ x^2-2=y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=y\\ x^2-x-2=0\end{array}\right\}.$$

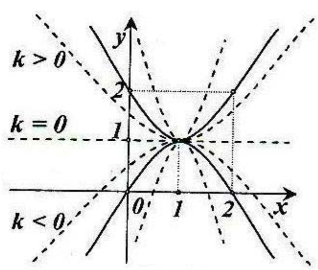
Iz druge jednačine se dobije da je $x = 2$ ili $x = -1$. Prema uslovu zadatka, jedino rješenje sistema je $x = 2,\quad y = 2.$

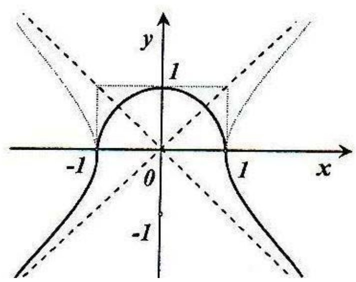
10.a) Linije u xOy-ravni određene jednačinama $y = x + k,\ k \in R$ su prave paralelne sa pravom $y = x,$ (Slika 25.).



Slika 25.

b) Jednačinu $y = kx^2 - 2kx + k + 1$ napišimo u obliku $y = k\cdot\left(x^2 - 2x + 1\right) + 1$, odnosno u obliku $y = k(x-1)^2 + 1$. Sada se vidi da su linije određene ovim jednačinama parabole koje prolaze kroz tačku *M (1,1)* za $k \neq 0,$ i prava $y = 1$ za $k = 0,$ (Slika 26.).





Slika 26. *Slika 27.*

c) Kako je $|y| = \begin{cases} y, & y \geq 0 \\ -y, & y < 0 \end{cases}$, to jednačina $x^2 + y|y| = 1$ za $y \geq 0$ glasi $x^2 + y^2 = 1$, a linija koja joj odgovara je dio kružnice u prvom i drugom kvadrantu (Slika 27.). Za $y < 0$ dobija se dio hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ u trećem i četvrtom kvadrantu.

Test broj 5

1. a) Izračunati $\sqrt{(-2)^2}+9^{-\frac{1}{2}}-81^{-2^{-2}}+3^{\frac{1}{\log_2 3}}$.

b) Uprostiti izraz $\left(3-\frac{(a+b)^2}{ab}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right):\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}$.

2) Riješiti jednačine:

a) $|3x-1|-|2-x|=1$, b) $\frac{1}{1+x+x^2+x^3+\ldots}=\frac{\sqrt{4x-1}}{2}$.

3) Riješiti trigonometrijsku jednačinu $\cos 2x+\sin^2 x=\cos x$.

4.) Riješiti nejednačinu $\frac{1}{x+1}>\frac{2x}{2x-1}$.

5.) Odrediti tačku krive $2x^2+y^2=3$ koja je na najkraćem odstojanju od prave $2x-y+4=0$.

6.) Kroz proizvoljnu tačku u datom trouglu povučene su prave paralelne stranicama i tako su dobijena tri manja trougla čije su površine P_1, P_2 i P_3. Kolika je površina datog trougla?

7.) U pravu kružnu kupu sa poluprečnikom osnove $r=4\ cm$ i visinom $H=6\ cm$ upisan je valjak maksimalne zapremine. Izračunati tu zapreminu.

8.) Treći član aritmetičke progresije je 9, a razlika između sedmog i drugog člana je 20. Koliko članova progesije treba sabrati da bi njihova suma bila 91?

9.) Riješiti sistem jednačina $\left.\begin{aligned}x+\sqrt{xy}+y&=14\\x^2+xy+y^2&=84\end{aligned}\right\}$.

10.) U xOy - ravni predstaviti skupove određene relacijama:

a) $(x^2+y)\cdot(y-x+1)\le 0$, b) $(y-\ln x)\cdot(x-1)\ge 0$ c) $(x^2+y^2-1)\cdot(y+|x|)\le 0$

Rješenje testa broj 5

1. a)

$$\sqrt{(-2)^2}+9^{-\frac{1}{2}}-81^{-2^{-2}}+3^{\frac{1}{\log_2 3}}=|-2|+\frac{1}{\sqrt{9}}-81^{-\frac{1}{4}}+3^{\log_3 2}=$$

$$=2+\frac{1}{3}-\left(3^4\right)^{-\frac{1}{4}}+2=2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+2=4.$$

b)

$$\left(3-\frac{(a+b)^2}{ab}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right):\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}=\frac{3ab-a^2-2ab-b^2}{ab}\cdot\frac{b^2-a^2}{ab}\cdot\frac{a^2b^2}{a^3+b^3}=$$

$$=-\frac{\left(a^2-ab+b^2\right)(b-a)(b+a)}{(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}=a-b,\ \text{uz uslov } ab\neq 0,\ a\neq -b.$$

2. a) Kako je $|3x-1|=\begin{cases}3x-1, & x\geq\frac{1}{3}\\ -(3x-1), & x<\frac{1}{3}\end{cases}$ i $|2-x|=\begin{cases}2-x, & x\leq 2\\ -(2-x), & x>2\end{cases}$

jednačinu $|3x-1|-|2-x|=1$, ćemo rješavati posebno u sledećim intervalima: $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right),\left[\frac{1}{3},2\right]$ i $(2,+\infty)$.

(1) $\left[x<\frac{1}{3}\wedge(-3x+1-2+x=1)\right]\Leftrightarrow\left[x<\frac{1}{3}\wedge 2x=-2\right]\Leftrightarrow x=-1$

(2) $\left[\frac{1}{3}\leq x\leq 2\wedge(3x-1-2+x)=1\right]\Leftrightarrow\left[\frac{1}{3}\leq x\leq 2\wedge 4x=4\right]\Leftrightarrow x=1$

(3) $[x>2\wedge(3x-1-(-2+x)=1)]\Leftrightarrow[x>2\wedge 2x=0]\Leftrightarrow x=\Theta.$

Prema tome, skup rješenja date jednačine je $\{-1,1\}$.

b) Kako zbir članova beskonačne geometrijske progresije postoji samo $|q|<1$, a kvadratni korjen postoji za negativne brojeve, to će, s obzirom na to da lijeva strana ne može biti 0, jednačina $\frac{1}{1+x+x^2+x^3+\ldots}=\frac{\sqrt{4x-1}}{2}$ imati smisla za $4x-1>0$ i $|x|<1$, tj. za $\frac{1}{4}<x<1$.

Kako je $q = x$ pozitivno to će biti $S_{\infty} = \dfrac{1}{1-x}$, pa važi:

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+\ldots} = \frac{\sqrt{4x-1}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = \frac{\sqrt{4x-1}}{2} \Rightarrow 4\cdot(1-x)^2 = 4x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \vee x = \frac{1}{2}.$$

Prema uslovu zadatka, rješenje jednačine je samo $x = \dfrac{1}{2}$.

3.)

$$\begin{aligned}\cos 2x + \sin^2 x = \cos x &\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = \cos x\\ &\Leftrightarrow \cos^2 x - \cos x = 0\\ &\Leftrightarrow \mathrm{cosx}(\mathrm{cosx} - 1) = 0\\ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = 1\\ &\Leftrightarrow \mathrm{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in Z \ \vee \ x = 2l\pi,\ l \in Z.\end{aligned}$$

4.) Nejednačina $\dfrac{1}{x+1} > \dfrac{2x}{2x-1}$ ima smisla za $x \neq -1$ i $x \neq \dfrac{1}{2}$.

$$\frac{1}{x+1} > \frac{2x}{2x-1} \Rightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{2x-1} > 0 \Rightarrow \frac{-2x^2-1}{(x+1)(2x-1)} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-(2x^2+1)}{(x+1)(2x-1)} > 0 \Rightarrow (x+1)(2x-1) < 0 \Rightarrow x \in \left(-1, \frac{1}{2}.\right)$$

5.) Tražena tačka je dodirna tačka elipse $2x^2 - y^2 = 3$ i njene tangente koja je paralelna datoj pravoj $p: 2x - y + 4 = 0$. Koeficijent pravca tangente jednak je koeficijentu pravca *p*. Eksplicitni oblik jednačine prave *p* je $y = 2x + 4$, iz čega slijedi da je $k_p = 2$ pa je i $k_t = 2$. Iz kanonskog oblika jednačine elipse *e:* $\dfrac{x^2}{\frac{3}{2}} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ nalazimo da je $a^2 = \dfrac{3}{2}$ i $b^2 = 3$, pa iz uslova dodira $n^2 = a^2k^2 + b^2$ prave $y = kx + n$ i elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, gdje je $k = 2$, dobijamo da je $n^2 = 9$.

Jednačine tangenti su $t_1: y = 2x + 3$ i $t_2: y = 2x - 3$.

Rješavanjem sistema $\left.\begin{matrix} 2x^2+y^2=3 \\ 2x-y=3 \end{matrix}\right\}$ i $\left.\begin{matrix} 2x^2+y^2=-3 \\ 2x-y=-3 \end{matrix}\right\}$

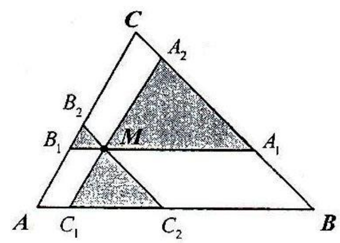
dobijamo dodirne tačke $P_1(-1,1)$ i $P_2(1,-1)$.

Rastojanja ovih tačaka do prave $p: 2x-y+4=0$ su:

$$d(P_1,p)=\frac{|2\cdot(-1)-1+4|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad d(P_2,p)=\frac{|2\cdot 1+1+4|}{\sqrt{4+1}}=\frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Dakle, tačka $P_1(-1,1)$ je tačka elipse koja je najbliža datoj pravoj *p*.

6.) Trouglovi MB_1B_2, A_1MA_2 i C_2C_1M su slični trouglu *ABC* (Slika 28.), jer su im odgovarajući uglovi jednaki kao uglovi sa paralelnim kracima. Ako je $CB=a$, $B_2M=a_1$, $A_1A_2=a_2$ i $A_1B=a_3$, prema uslovu zadatka slijedi da je $a_1+a_2+a_3=a$.



Slika 28.

Površine sličnih trouglova se odnose kao kvadrati odgovarajućih stranica, pa je:

$$\frac{P_1}{P}=\frac{a_1^2}{a^2}\Rightarrow P_1=\frac{P\cdot a_1^2}{a^2}\Rightarrow \sqrt{P_1}=\frac{a_1}{a}\sqrt{P} \qquad (1)$$

$$\frac{P_2}{P}=\frac{a_2^2}{a^2}\Rightarrow P_2=\frac{P\cdot a_2^2}{a^2}\Rightarrow \sqrt{P_2}=\frac{a_2}{a}\sqrt{P} \qquad (2)$$

$$\frac{P_3}{P}=\frac{a_3^2}{a^2}\Rightarrow P_3=\frac{P\cdot a_3^2}{a^2}\Rightarrow \sqrt{P_3}=\frac{a_3}{a}\sqrt{P} \qquad (3)$$

Iz (1), (2) i (3) se dobija da je $\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}=\sqrt{P}\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{a}\right)$,

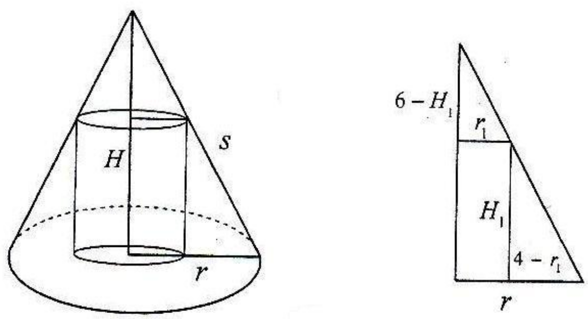
iz čega slijedi da je $P=\left(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}\right)^2$.

7.) Neka je H_1 visina valjka upisanog u kupu (Slika 29). Prema uslovu zadatka, visina kupe $H=6\ cm$, a poluprečnik osnove kupe je $r=4\,cm$. Na osnovu sličnosti trouglova (Slika 29.) slijedi da je $\frac{6-H_1}{r_1}=\frac{H_1}{4-r_1}\Rightarrow H_1=\frac{24-6r_1}{4}$. Zapremina valjka je funkcija od r_1, tj. $V=f(r_1)$ i

$$V_V=B_1\cdot H_1=\pi\cdot r_1^2\cdot H_1=\pi\cdot r_1^2\left(6-\frac{3}{2}r_1\right)=\pi\cdot r_1^3\left(-\frac{3}{2}\right)+6\pi\cdot r_1^2.$$

Iz $f'(r_1) = -\frac{9}{2}\pi \cdot r_1^2 + 12\pi \cdot r_1$ i $f'(r_1) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0 \vee r_1 = \frac{8}{3}$

slijedi da funkcija f prima svoju maksimalnu vrijednost za $r_1 = \frac{8}{3}$ pa je $V_{\max} = \pi \cdot \frac{64}{9} \cdot 2 = \frac{128\pi}{9} cm^3$.



Slika 29.

8.) Zbir prvih n članova aritmetičke progresije izračunava se po formuli $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)\cdot d], \ n \in N.$

Kako je po uslovu zadatka:

$$\left.\begin{aligned} a_7 - a_2 &= 20 \\ a_3 &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 + 6d - a_1 - d &= 20 \\ a_1 + 2d &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 5d &= 20 \\ a_1 + 2d &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} d &= 4 \\ a_1 &= 1 \end{aligned}\right\},$$

to je $91 = \frac{n}{2}[2\cdot 1 + (n-1)\cdot 4]$, odnosno $2n^2 - n - 91 = 0$.

Rješenja jednačine su $n = 7$ ili $n = -\frac{27}{4}$. Dakle, treba uzeti 7 članova progresije da bi njihov zbir bio 91.

9.) Sistem ima smisla za $xy \geq 0$.
Kako je

$$(14 - x - y)^2 = 14^2 + x^2 + y^2 - 2\cdot 14\cdot x - 2\cdot 14\cdot y + 2xy =$$
$$= 196 + x^2 + y^2 - 28x - 28y + 2xy,$$

to je

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{xy}=14-x-y\\ x^2+xy+y^2=84\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}xy=196+x^2+y^2-28x-28y+2xy\\ x^2+xy+y^2=84\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x^2+xy+y^2=28\cdot(x+y)-196\\ x^2+xy+y^2=84\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}28\cdot(x+y)=196+84\\ x^2+xy+y^2=84\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y=10\\ x^2+xy+y^2=84\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=10-y\\ (10-y)^2+y^2+(10-y)\cdot y=84\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=10-y\\ y^2-10y+16=0\end{array}\right\}.$$

Rješavanjem druge jednačine sistema dobijamo da je $y=8$ ili $y=2$.
Skup rješenja sistema je $\{(8,2),(2,8)\}$.

2. Način

Kako je $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$, to će dati sistem biti ekvivalentan sistemu:

$$\left.\begin{array}{l}x+y+\sqrt{xy}=14\\ (x+y)^2-xy=84\end{array}\right\}.$$

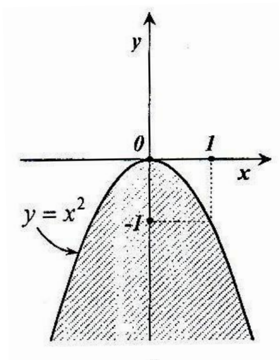
Uvođenjem smjene $a=x+y,\ b=\sqrt{xy}$ dobija se da je

$$\left.\begin{array}{l}a+b=14\\ a^2-b^2=84\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a+b=14\\ (a-b)(a+b)=84\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a+b=14\\ a-b=6\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=10\\ b=4\end{array}\right\}.$$

Prelaskom na stare promjenjive, jednostavno se dolazi do rješenja sistema.

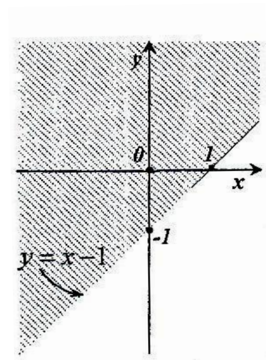
10. a)

$$\begin{array}{l}(x^2+y)(y-x+1)\le 0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow(x^2+y\le 0\wedge y-x+1\ge 0)\vee(x^2+y\ge 0\wedge y-x+1\le 0)\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow(y\le -x^2\wedge y\ge x-1)\vee(y\ge -x^2\wedge y\le x-1).\end{array}$$



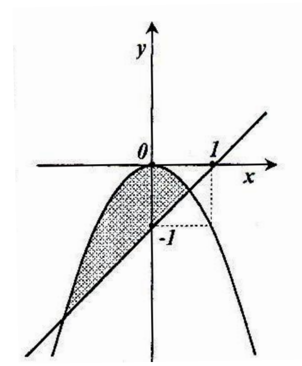
$y \leq -x^2$

Slika 30.



$y \geq x - 1$

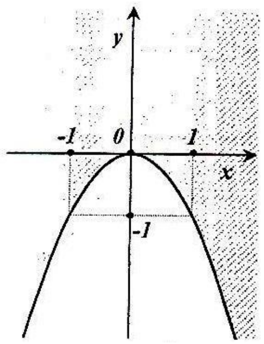
Slika 31.



$y \leq -x^2 \wedge y \geq x - 1$

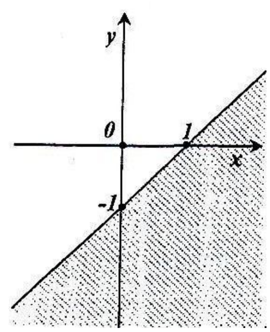
Slika 32.

Presjek skupova prikazanih na slikama 30. i 31. predstavljen je na slici 32.



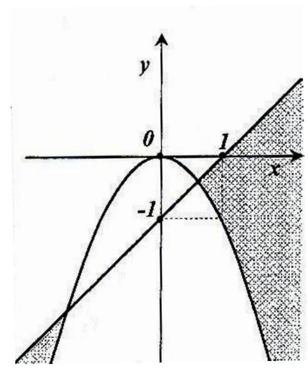
$y \geq -x^2$

Slika 33.



$y \leq x - 1$

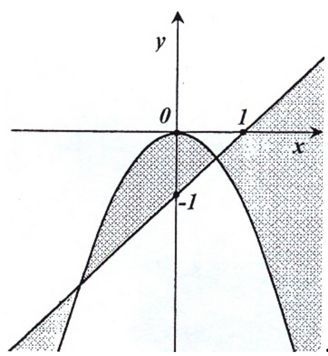
Slika 34.



$y \geq -x^2 \wedge y \leq x - 1$

Slika 35.

Presjek skupova prikazanih na slikama 33 i 34 predstavljen je na slici 35



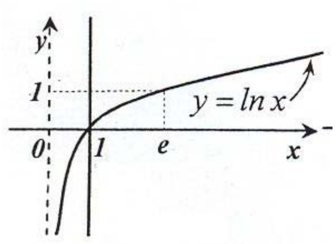
$\left(y \leq -x^2 \wedge y \geq x - 1\right) \vee \left(y \geq -x^2 \wedge y \leq x - 1\right)$

Slika 36.

Unija skupova prikazanih na slikama 32. i 35., tj. konačno rješenje prikazano je na slici 36.

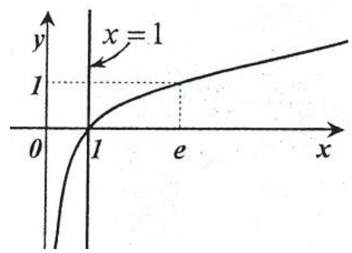
b)

$$(y-\ln x)(x-1)\ge 0 \Leftrightarrow (y-\ln x\ge 0 \wedge x-1\ge 0)\vee (y-\ln x\le 0\wedge x-1)\le 0$$
$$\Leftrightarrow (y\ge \ln x \wedge x\ge 1)\vee (y\le \ln x\wedge x\le 1)$$



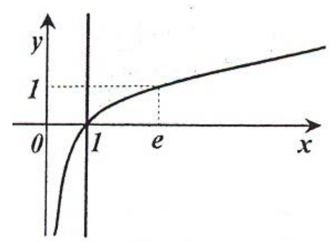
$y\ge \ln x$

Slika 37.



$x\ge 1$

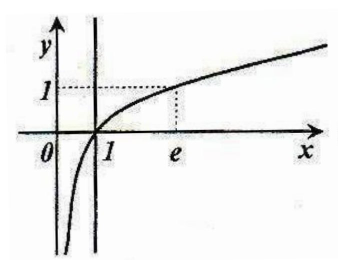
Slika 38.



$y\ge \ln x\wedge x\ge 1$

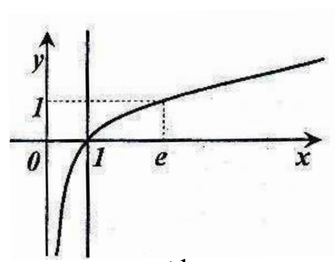
Slika 39.

Presjek skupova prikazanih na slikama 37. i 38. predstavljen je na slici 39.



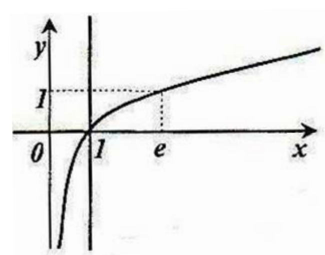
$x\ge 1$

Slika 40.



$y\le \ln x$

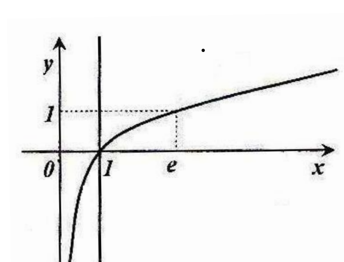
Slika 41.



$y\le \ln x\wedge x\le 1$

Slika 42.

Presjek skupova prikazanih na slikama 40. i 41. predstavljen je na slici 42.



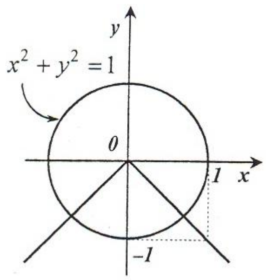
$(y\ge \ln x\wedge x\ge 1)\vee (y\le \ln x\wedge x\le 1)$

Slika 43.

Unija skupova prikazanih na slikama 39. i 42. predstavljena je na slici 43., što je i konačno rješenje zadatka.

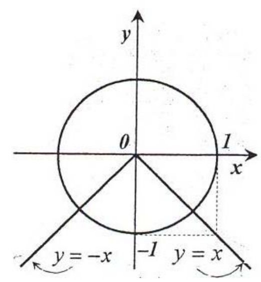
c)

$$\left(x^2+y^2-1\right)\left(y+|x|\right)\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2-1\le 0 \wedge y+|x|\ge 0\right)\vee\left(x^2+y^2-1\ge 0\wedge y+|x|\le 0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\le 1\wedge y\ge -|x|\right)\vee\left(x^2+y^2\ge 1\wedge y\le -|x|\right)$$



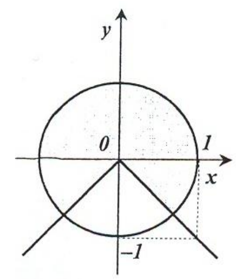
$x^2+y^2\le 1$

Slika 44.



$y\ge -|x|$

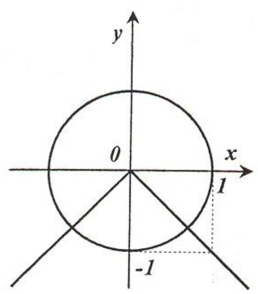
Slika 45.



$x^2+y^2\le 1\wedge y\ge -|x|$

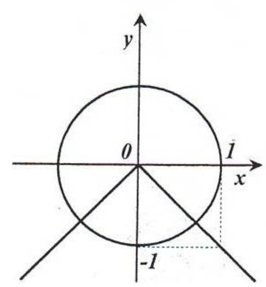
Slika 46.

Presjek skupova prikazanih na slikama 44. i 45. pretstavljen je na slici 46.



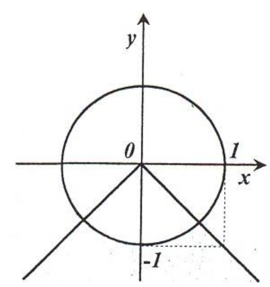
$x^2+y^2\ge 1$

Slika 47.



$y\le -|x|$

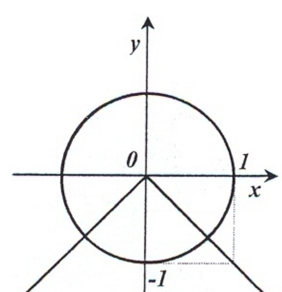
Slika 48.



$x^2+y^2\ge 1\wedge y\le -|x|$

Slika 49.

Presjek skupova prikazanih na slikama 47. i 48. pretstavljen je na slici 49.



$\left(x^2+y^2\le 1\wedge y\ge -|x|\right)\vee\left(x^2+y^2\ge 1\wedge y\le -|x|\right)$

Slika 50.

Unija skupova prikazanih na slikama 46. i 49. predstavljena je na slici 50., što je i konačno rješenje zadatka.