# 1. ТРАНСФОРМАЦИЈА ИЗРАЗА

**1. Упростити израз**

$$\frac{ab^{-2}\left(a^{-1}b^{2}\right)^{4}\left(ab^{-1}\right)^{2}}{a^{-2}b\left(a^{2}b^{-1}\right)^{3}a^{-1}b},$$

**а затим одредити вриједност израза за $a$=10$^{-3}$ и $b$= -10$^{-2}$.**

***Рјешење:***

Дати израз је дефинисан за $a\neq 0$ и $b\neq 0$.

$$\frac{ab^{-2}a^{-4}b^{8}a^{2}b^{-2}}{a^{-2}ba^{6}b^{-3}a^{-1}b}=\frac{a^{-1}b^{4}}{a^{3}b^{-1}}=\frac{b^{5}}{a^{4}} .$$

За $a$=10$^{-3}$ и $b$=-10$^{-2}$ вриједност израза је

$$\frac{\left(-10^{-2}\right)^{5}}{\left(10^{-3}\right)^{4}}=\frac{-10^{-10}}{10^{-12}}=-100 .$$

**2. Одредити вриједност разломка**

$$\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}} .$$

***Рјешење:***

$$\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^{3}}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2}}-\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}=2-1=1.$$

**3. Поједноставити сљедећи израз**

$$\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}$$

**ако је $x=2mn/(n^2+1)$, $m>1$ и $0<n<1$.**

***Рјешење:***

$$\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}\cdot\frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}=\frac{m+x+2\sqrt{m^{2}-x^{2}}+m-x}{m+x-m+x}=\frac{2m+2\sqrt{m^{2}-x^{2}}}{2x}=\frac{m+\sqrt{m^{2}-x^{2}}}{x}.$$

Ако у овај израз уврстимо $x=2mn/(n^2+1)$, тада добијамо сљедећи израз:

$$\frac{m+\sqrt{m^2-\frac{4m^2n^2}{\left(n^2+1\right)^2}}}{\frac{2mn}{n^2+1}}=\frac{m\left(n^2+1\right)+\sqrt{m^2n^4+2m^2n^2+m^2-4m^2n^2}}{2mn}=$$

$$=\frac{m\left(n^2+1\right)+\sqrt{m^2\left(n^2-1\right)^2}}{2mn}=\frac{m\left(n^2+1\right)+\left|m\left(n^2-1\right)\right|}{2mn}\ .$$

За $m>1$ и $0<n<1$ имамо да је $m(n^2-1)<0$, па горњи израз добија облик:

$$\frac{m\left(n^2+1\right)-m\left(n^2-1\right)}{2mn}=\frac{1}{n}.$$

## 4. Да ли је исправна пропорција

$$\frac{6acm^2-18acm}{4a^2m^4-108a^2m}:\frac{15ac^2m+45ac^2}{24a^3m+72a^3}=\frac{4a^2b^2cm-12a^2b^2c}{3b^2c^3m-9b^2c^3}:\frac{5ab^2m^4-135ab^2m}{9b^2cm^2-27b^2cm}\ ?$$

***Рјешење:***

$$\frac{6acm(m-3)}{4a^2m\left(m^3-27\right)}:\frac{15ac^2(m+3)}{24a^3(m+3)}=\frac{4a^2b^2c(m-3)}{3b^2c^3(m-3)}:\frac{5ab^2m\left(m^3-27\right)}{9b^2cm(m-3)}$$

$$\frac{3c}{2a\left(m^2+3m+9\right)}:\frac{5c^2}{8a^2}=\frac{4a^2}{3c^2}:\frac{5a\left(m^2+3m+9\right)}{9c}$$

$$\frac{3c}{2a\left(m^2+3m+9\right)}\cdot\frac{5a\left(m^2+3m+9\right)}{9c}=\frac{5c^2}{8a^2}\cdot\frac{4a^2}{3c^2}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$$

Пропорција је исправна.

## 5. Упростити израз

$$\sqrt[4]{1+2x+x^2}\sqrt{\frac{x^4+x^5}{x^2-1}}\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}.$$

***Рјешење:***

Израз је дефинисан за $x\neq0$ и $x\neq\pm1$.

$$\sqrt[4]{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x^4(x+1)}{x^2-1}}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^4}}=\sqrt[4]{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x^4(x+1)}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^4}}=$$

$$=\sqrt[4]{(x+1)^2}\sqrt{x+1}=\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$$

**6. Упростити израз**

$$\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}\ .$$

***Рјешење:***

$$\frac{\left(x+2+\sqrt{x^2-4}\right)^2}{(x+2)^2-x^2+4}+\frac{\left(x+2-\sqrt{x^2-4}\right)^2}{(x+2)^2-x^2+4}=$$

$$\frac{(x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x^2-4}+x^2-4}{4x+8}+\frac{(x+2)^2-2(x+2)\sqrt{x^2-4}+x^2-4}{4x+8}$$

$$=\frac{2x^2+8x+8+2x^2-8}{4x+8}=x.$$

**7. Упростити израз**

$$\frac{\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}}\ ,\ (x=\sqrt{ab}\ \ ,a>0,b>0\ )\ .$$

***Рјешење:***

$$\frac{\left(\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}\right)^2}{(a+x)(x+b)\text{ - }(a-x)(x-b)}=\frac{2ax+2bx+2\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}{2ab+2x^2}$$

$$=\frac{ax+bx+\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}{ab+x^2}$$

Уврстимо $x=\sqrt{ab}$

$$\frac{a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}+\sqrt{(a^2-ab)(ab-b^2)}}{ab+ab}=\frac{\sqrt{ab}(a+b)+\sqrt{ab}|a-b|}{2ab}$$

$1^\bullet\quad a-b>0\ \Rightarrow\ a>b$

$$\frac{\sqrt{ab}(a+b)+\sqrt{ab}(a-b)}{2ab}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

$2^\bullet\quad a-b<0\ \Rightarrow\ a<b$

$$\frac{\sqrt{ab}(a+b-a+b)}{2ab}=\frac{\sqrt{ab}}{a}$$

$3^\bullet\quad a=b\ \Rightarrow\ \dfrac{\sqrt{a^2}\,2a}{2a^2}=1$

**8. Упростити израз**

$$\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}, \quad \left(x=\left[\frac{p^2+q^2}{2pq}\right]^{\frac{1}{2}} \; , \; p>q \; , pq\neq 0\right).$$

***Рјешење:***

$$\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}\right]^{-2}=\left[\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}\right]^2=\left[\frac{2x^2-2\sqrt{x^4-1}}{-2}\right]^2=\left(x^2-\sqrt{x^4-1}\right)^2$$

$$=2x^4-2x^2\sqrt{x^4-1}-1$$

$$=2\left[\left(\frac{p^2+q^2}{2pq}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^4-2\left[\left(\frac{p^2+q^2}{2pq}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\sqrt{\left[\left(\frac{p^2+q^2}{2pq}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^4-1}-1$$

$$=\frac{\left(p^2+q^2\right)^2}{2p^2q^2}-\frac{\left(p^2+q^2\right)}{pq}\sqrt{\frac{\left(p^2-q^2\right)^2}{4p^2q^2}}-1$$

$$=\frac{\left(p^2+q^2\right)^2}{2p^2q^2}-\frac{\left(p^2+q^2\right)\left(p^2-q^2\right)}{2p^2q^2}-1=\frac{q^2}{p^2}.$$

**9. Трансформисати сљедећи израз**

$$\frac{a^2-1}{n^2+an}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}.$$

***Рјешење:***

$$\frac{a^2-1}{n^2+an}\left(\frac{n}{n-1}-1\right)\cdot\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}=\frac{a^2-1}{n^2+an}\cdot\frac{n-n+1}{n-1}\cdot\frac{-a+an^3+n^4-n}{a^2-1}=$$

$$\frac{-(a+n)+n^3(a+n)}{n(n+a)(n-1)}=\frac{(a+n)\left(n^3-1\right)}{n(a+n)(n-1)}=\frac{n^2+n+1}{n}.$$

**10. Упростити израз:**

$$\left[x-\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}+\frac{3}{x^2-x+1}\right)\left(x-\frac{2x-1}{x+1}\right)\right]\left(x^2+x+1\right).$$

***Рјешење:***

$$\left(x-\frac{x^2-x+1-3+3x+3}{x^3+1}\cdot\frac{x^2+x-2x+1}{x+1}\right)\left(x^2+x+1\right)=\left(x-\frac{x^2+2x+1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}\cdot\frac{x^2-x+1}{x+1}\right)\left(x^2+x+1\right)$$
$$=(x-1)\left(x^2+x+1\right)=x^3-1.$$

**11. Упростити израз**

$$\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)\cdot\frac{x^4-2x^3+8x-16}{4}-2x\,.$$

***Рјешење:***

$$\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x^3(x-2)+8(x-2)}{4}-2x=\frac{4}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x-2)\left(x^3+8\right)}{4}-2x$$
$$=\frac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{x+2}-2x=x^2-2x+4-2x=(x-2)^2.$$

**12. Упростити израз**

$$\frac{2a}{a^2-4x^2}+\frac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot\left(x+\frac{3x+6}{x+2}\right)$$

***Рјешење:***

$$\frac{2a}{a^2-4x^2}+\frac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot\left(x+\frac{3x+6}{x+2}\right)=$$
$$\frac{2a}{(a-2x)(a+2x)}+\frac{1}{2x(x+3)-a(x+3)}\cdot\left(x+\frac{3(x+2)}{x+2}\right)=$$
$$\frac{2a}{(a-2x)(a+2x)}+\frac{1}{(x+3)(2x-a)}\cdot(x+3)=$$
$$\frac{2a}{(a-2x)(a+2x)}-\frac{1}{a-2x}=\frac{2a-a-2x}{(a-2x)(a+2x)}=\frac{1}{a+2x}$$

за $x\neq -a/2$.

**13. Упростити израз**

$$\left(\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a}{4-a^2}-\frac{2}{a+2}\right)\frac{a^3-2a^2-4a+8}{a^2-1}.$$

***Рјешење:***

$$\left(\frac{a}{(a-2)^2}+\frac{a}{a^2-4}-\frac{2}{a+2}\right)\cdot\frac{a^2(a-2)-4(a-2)}{a^2-1}=\frac{a(a+2)+a(a-2)+2(a-2)^2}{(a-2)(a^2-4)}\cdot\frac{(a-2)(a^2-4)}{a^2-1}$$

$$=\frac{4(a^2-a+1)}{a^2-1}=\frac{4(a-1)}{a+1}$$

За $a\neq -1$.

## 2. ЈЕДНАЧИНЕ, НЕЈЕДНАЧИНЕ И СИСТЕМИ

### 1. Ријешити једначину:

$$\frac{1}{nx-n^2}-\frac{1}{mn-mx}=\frac{1}{mn-nx}-\frac{1}{mx-m^2}.$$

***Рјешење:***

Једначина је дефинисана за $m,n\neq 0\wedge x\neq m\wedge x\neq n$ .

$$\frac{1}{n(x-n)}-\frac{1}{m(n-x)}=\frac{1}{n(m-x)}-\frac{1}{m(x-m)}$$

$$\frac{m+n}{mn(x-n)}=\frac{m+n}{nm(m-x)}$$

$$x-n=m-x\Rightarrow x=\frac{m+n}{2}$$

### 2. Ријешити једначину

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{4}{x+1}\left(\frac{1}{x-1}+1\right).$$

***Рјешење:***

Дефиниционо подручје: $x\neq\pm1$, тј. $\forall x\in R\backslash\{-1,1\}$.

$$\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{x^2-1}=\frac{4}{x+1}\cdot\frac{1+x-1}{x-1}$$

$$\frac{4x}{x^2-1}=\frac{4x}{x^2-1}$$

$$4x=4x$$

Рјешење је $\forall x\in R\backslash\{-1,1\}$, тј. једначина је неодређена.

### 3. Ријешити једначину

$$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}=\frac{7}{12}.$$

***Рјешење:***

Дефиниционо подручје : $\frac{x+2}{2x+2}>0\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$

Уводимо смјену $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}=t.$

$$t-\frac{1}{t}=\frac{7}{12}$$

$$12t^2-7t-12=0$$

$$t_{1,2}=\frac{7\pm25}{24}$$

$$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}=\frac{4}{3}$$
$$18x+18=16x+32$$
$$x=7$$
$$t_1=\frac{4}{3}$$
$$t_2=-\frac{3}{4}\left(\text{Како је } t=\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}>0, \text{ рјешење } t_2 \text{ отпада.}\right)$$

**4. За које $\alpha$ из скупа реалних бројева рјешења квадратне једначине $2x^2-\alpha x+6=0$ су:**
**а) реална и различита,**
**б) реална и једнака,**
**в) комплексна?**

***Рјешење:***

Дискриминанта једначине је $D=\alpha^2-48$.

а) $D>0 \Rightarrow \alpha^2-48>0 \Rightarrow (\alpha-4\sqrt{3})(\alpha+4\sqrt{3}) \Rightarrow \alpha\in(-\infty,-4\sqrt{3})\cup(4\sqrt{3},+\infty)$

б) $D=0 \Rightarrow \alpha^2-48=0 \Rightarrow \alpha=\pm4\sqrt{3}$

в) $D<0 \Rightarrow \alpha^2-48<0 \Rightarrow \alpha\in(-4\sqrt{3},4\sqrt{3})$

**5. Одредити све вриједности параметра $m$ за које је квадратни трином $mx^2-4mx+m^2+2m-3$ позитиван за све вриједности промјенљиве $x$.**

***Рјешење:***

Знамо да је $ax^2+bx+c>0$ за $\forall x\in \mathrm{R}$ ако су задовољени услови да је $a>0$ и $D<0$.
$D=16m^2-4m(m^2-2m-3)=-4m^3+8m^2+12m<0$
$-4m(m^2-2m-3)<0$
Из услова $a>0$ слиједи $m>0$, а то значи да је $m^2-2m-3>0$.
$m^2-2m-3>0$
$(m+1)(m-3)>0 \Rightarrow m\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$
Због $m>0$ слиједи да је рјешење $m\in(3,+\infty)$.

**6. Дата је једначина $x^2-2(a+1)x+3a+2=0$. Дискутовати реалност рјешења.**

***Рјешење:***

$D=4(a+1)^2-4(3a+2)=4a^2-4a-4=4(a^2-a-1)$

$D=0 \Rightarrow a_{1,2}\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, рјешења реална и једнака.

$D>0 \Rightarrow a\in\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$, у том случају су рјешења реална и различита.

**7. Дата је једначина $7(m+x)-11=m^2-4+3(x+1)$. Одредити параметар $m$ тако да рјешење дате једначине буде негативно.**

***Рјешење:***

$7m+7x-11=m^2-4+3x+3$

$4x= m^2-7m+10$

$x=( m^2-7m+10)/4$

За $x<0 \Rightarrow m^2-7m+10<0 \Rightarrow (m-2)(m-5) <0$. Рјешење једначине је $m\in(2,5)$.

**8. За које вриједности једначина $x^4(a+3)-4ax^2+(1-a)=0(1)$ нема реална рјешења?**

***Рјешење:***

Смјена: $x^2=t$

$t^2(a+3)-4at+1-a=0$ (2)

Једначина нема реална рјешења ако је $D<0$.

$D=16a^2-4(a+3)(1-a)= 20a^2+8a-12<0 \Rightarrow a\in(-1,3/5)$.

Сада одредимо оне вриједности $a$ за које су оба рјешења $t_1$ и $t_2$ једначине (2) негативна (да једначина (1) не би имала реална рјешења). Ако су $t_1, t_2<0$, према Виетовим формулама је:

$t_1 + t_2=4a/(a+3) <0 \wedge t_1t_2=(1-a)/(a+3)>0$.

$4a/(a+3) <0 \Rightarrow a\in(-3,0)$

$(1-a)/(a+3)>0 \Rightarrow a\in(-3,1)$

Рјешење је $a\in(-3,0)$, што заједно са $a\in(-1,3/5)$ даје $a\in(-3,3/5)$.

**9. Дата је једначина $x^2+4tx-4(t+1)=0$. Наћи све вриједности параметра $t$ за које ова једначина има реална рјешења.**

***Рјешење:***

$D\geq0$

$D=16t^2+16(t+1) \Rightarrow t^2+t+1\geq0$, а то је позитивно $\forall t\in R$.

**10. Дата је једначина $x^2+4tx+2(t+1)=0$. Наћи све вриједности параметра $t$ за које ова једначина има реална рјешења.**

***Рјешење:***

$D\geq0$

$D=16t^2-8(t+1) \Rightarrow 2t^2-t-1\geq0$

$t_1=1,\ t_2= -1/2$

Рјешење је: $t\in(-\infty,-1/2]\cup[1,+\infty)$.

**11. Одредити све вриједности параметра *p*, тако да коријени једначине $x^2-3px+p^2=0$ задовољавају услов**

$$x_1^2+x_2^2=\frac{7}{4}.$$

***Рјешење:***

По Виетовим формулама, за једначину $ax^2+bx+c=0$ важи $x_1+x_2=-b/a$ , $x_1x_2=c/a$.
У нашем случају је $x_1+x_2=3p$, $x_1x_2=p^2$.
Одавде ће бити :

$$x_1^2+x_2^2=\frac{7}{4}$$

$$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=\frac{7}{4}$$

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{7}{4}$$

$$(3p)^2-2p^2=\frac{7}{4}$$

$$7p^2=\frac{7}{4}$$

$$p^2=1/4 \Rightarrow p_1=1/2,\ p_2=-1/2$$

**12. Ријешити једначину**

$$\frac{(a-x)^3+(b-x)^3}{(a-x)^2-(b-x)^2}=a-b\ .$$

***Рјешење:***

Дефиниционо подручје: $(a-x)^2\neq(b-x)^2 \Leftrightarrow a-x\neq b-x \wedge a-x\neq b+x \Rightarrow a\neq b \wedge x\neq(a+b)/2$.

$$\frac{(a-x+b-x)\left[(a-x)^2-(a-x)(b-x)+(b-x)^2\right]}{(a-x+b-x)(a-x-b+x)}=a-b$$

$$a^2-2ax+x^2-ab+ax+bx-x^2+b^2-2bx+x^2=a^2-2ab+b^2$$

$$x^2-(a+b)x+ab=0$$

$$x_{1,2}=\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-4ab}}{2}=\frac{a+b\pm|a-b|}{2}$$

$1^\circ$ $a-b>0$

$$x_1=a$$
$$x_2=b$$

$2^\circ$ $a-b<0$

$$x_1=b$$
$$x_2=a$$

**13. Наћи све вриједности параметра *t* за које је неједначина**

$$\frac{1}{(t+1)x^2+4tx+t-3}<0$$

**задовољена за свако реално *x*.**

***Рјешење:***

$$(t+1)x^2+4tx+t-3<0$$

$$t+1<0 \wedge D=16t^2-4(t+1)(t-3)<0$$

$$3t^2+2t+3<0$$

$$t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-32}}{6}\ -\text{нема реалне нуле}\Rightarrow\ 3t^2+2t+3>0,\quad \forall t\in R$$

Не постоји $t\in$ R тако да је неједначина задовољена $\forall x\in$ R.

**14. За коју вриједност параметра $k \in \mathbf{R}$ је задовољена неједначина $kx^2+3kx+k+2>0$ , $\forall x \in \mathbf{R}$?**

***Рјешење:***

$k > 0 \wedge D < 0$

$D = b^2 - 4ac = k(5k-8)$

Kako je $k > 0 \Rightarrow 5k - 8 < 0 \Rightarrow k \in \left[0, \frac{8}{5}\right)$

**15. За које вриједности параметра $m \in \mathbf{R}$ важи неједнакост**

$$\frac{-3}{mx^2 + 2mx - m^2 + 2} < 0 \;, \forall x \in \mathbf{R} \;\; ?$$

***Рјешење:***

$mx^2 + 2mx - m^2 + 2 > 0$

$m > 0 \;\wedge\; D < 0$

Kako je $m > 0 \;\Rightarrow\; m^2 + m - 2 < 0$

$m \in (-2,1)$

$D = 4m(m^2 + m - 2)$

Рјешење је $m \in [0,1)$.

**16. За коју вриједност параметра $k \in R$ важи неједначина**

$$\frac{-2}{kx^2 + 2kx - k^2 + 2} > 0, \quad \forall x \in R \; ?$$

***Рјешење:***

$kx^2 + 2kx - k^2 + 2 < 0 \Rightarrow k < 0 \wedge D < 0$

$D = 4k^2 - 4k(-k^2 + 2) = 4k(k^2 + k - 2) < 0 \Rightarrow k^2 + k - 2 > 0$

$k_1 = 1, k_2 = -2 \Rightarrow k \in (-\infty,-2) \cup (1,+\infty)$

због $k < 0 \Rightarrow k \in (-\infty,-2)$

**17. За које $m$ је тачна неједначина**

$$mx^2\text{-}2mx+m^2\text{-}2<0?$$

***Рјешење:***

$m \leq 0 \;\wedge D<0$

$D=4m^2-4m(m^2-2)=4m(m-m^2+2)<0$

Како је $m<0 \;\Rightarrow\; -m^2+m+2>0$

$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$

$m_1 = -1, m_2 = 2$

$m \in (-1,2)$

Рјешење је $m \in (-1,0]$.

## 18. Наћи сва рјешења једначине

$$x\left|x-4\right|=3(x-2),\quad x\in \mathbf{R}.$$

***Рјешење:***

а) $x-4\geq 0 \Rightarrow x\in [4,+\infty)$

$x^2-4x=3x-6$

$x^2-7x+6=0$

$x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\dfrac{7\pm 5}{2}$

$x_1=6,\quad x_2=1$

б) $x-4<0 \Rightarrow x\in(-\infty,4)$

$-x^2+4x=3x-6$

$-x^2+x+6=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-2}=\dfrac{-1\pm 5}{-2}$

$x_1=-2,\quad x_2=3$

Рјешења једначине су: $x$= -2, $x$=3, $x$=6.

## 19. Риjешити неједначину

$$\left|x+1\right|-\left|x-2\right|<3,\quad x\in R.$$

***Рјешење:***

| | -1 | 2 | |
|---|---|---|---|
| $x$+1 | - | + | + |
| $x$-2 | - | - | + |

На основу табеле имамо сљедеће:

а) $x\in(-\infty,-1]$

$-x-1+x-2<3$

$-3<3$

$R_1: x\in(-\infty,-1]$

б) $x\in(-1,2]$

$x+1+x-2<3$

$x<2$

$R_2: x\in(-1,2)$

в) $x\in(2,+\infty)$

$x+1-x+2<3$

$3<3$

Рјешење је $x\in(-\infty,2)$.

## 20. Риjешити неједначину

$$\left|x+2\right|-\left|x-1\right|<x-\frac{3}{2},\quad x\in R.$$

***Рјешење:***

| | -2 | 1 | |
|---|---|---|---|
| $x$+2 | - | + | + |
| $x$-1 | - | - | + |

а) $x \in (-\infty,-2]$

$$-x-2+x-1<x-\frac{3}{2}$$

$$x>-\frac{3}{2}$$

$$R_1:(-\infty,-2]\cap\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)=\varnothing$$

б) $x \in (-2,1]$

$$x+2+x-1<x-\frac{3}{2}$$

$$x<-\frac{5}{2}$$

$$R_2:(-2,1]\cap\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)=\varnothing$$

в) $x \in (1,+\infty)$

$$x+2-x+1<x-\frac{3}{2}$$

$$x>\frac{9}{2}$$

$$R_3:(1,+\infty)\cap\left(\frac{9}{2},+\infty\right)=\left(\frac{9}{2},+\infty\right)$$

Рјешење је $x\in(9/2,+\infty)$.

## 21.Ријешити неједначину

$$\left|\frac{x+4}{3x+2}\right|>\frac{1}{x}.$$

## *Рјешење:*

Дефиниционо подручје: $3x+2\neq 0 \wedge x\neq 0$, тј. $x\in(-\infty,-2/3)\cup(-2/3,0)\cup(0,+\infty)$.

| | | -4 | -2/3 |
|---|---|---|---|
| $x$+4 | - | + | + |
| 3$x$+2 | - | - | + |
| | + | - | + |

а) $x\in(-\infty,-4]$

$$\frac{x+4}{3x+2}>\frac{1}{x}$$

$$\frac{x+4}{3x+2}-\frac{1}{x}>0$$

$$\frac{x^2+x-2}{x(3x+2)}>0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x(3x+2)}>0$$

Види табелу 1.

б) $x\in\left(-4,-\frac{2}{3}\right)$

$$-\frac{x+4}{3x+2}>\frac{1}{x}$$

$$-\frac{x+4}{3x+2}-\frac{1}{x}>0$$

$$\frac{x^2-7x+2}{x(3x+2)}<0$$

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{41}}{2}\Rightarrow x_1=\frac{-7+\sqrt{41}}{2},\ x_2=\frac{-7-\sqrt{41}}{2}$$

Види табелу 2.

**Табела 1**

| | | -2 | -2/3 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$+2 | - | + | + | + | + |
| $x$-1 | - | - | - | - | + |
| $x$ | - | - | - | + | + |
| 3$x$+2 | - | - | + | + | + |
| k | + | - | + | - | + |

S: $x\in(-\infty,-2]\cup(-2/3,0)\cup[1,+\infty)$

$R_1$ : $(-\infty,-4]\cap S=(-\infty,-4]$

**Табела 2**

| | $x_2$ | -2/3 | $x_1$ | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | - | - | - | - | + |
| $3x+2$ | - | - | + | + | + |
| $x-x_1$ | - | - | - | + | + |
| $x-x_2$ | - | + | + | + | + |
| k | + | - | + | - | + |

$$A: x \in \left(\frac{-7-\sqrt{41}}{2}, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{-7+\sqrt{41}}{2}, 0\right)$$

$$R_2: \left(-4, -\frac{2}{3}\right) \cap A = \left(-4, -\frac{2}{3}\right)$$

в) $x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$

$$\frac{x+4}{3x+2} > \frac{1}{x}$$

$$B: x \in (-\infty, -2] \cup \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \cup [1, +\infty)$$

$$R_3: x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right) \cap B = \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \cup (1, +\infty)$$

Укупно рјешење је: $R_1 \cup R_2 \cup R_3 = (-\infty, -2/3) \cup (-2/3, 0) \cup (1, +\infty)$.
Рјешење је $x \in (-\infty, 2)$.

## 22. Ријешити неједначину

$$|x-1| + |x+3| \leq 4.$$

***Рјешење:***

| | -3 | 1 | |
|---|---|---|---|
| $x-1$ | - | - | + |
| $x+3$ | - | + | + |

*а)* $x \in (-\infty, -3]$

$-x+1-x-3 \leq 4$

$x \geq -3$

$R_1: x = -3$

*б)* $x \in (-3, 1)$

$-x+1+x+3 \leq 4$

$4 \leq 4$

$R_2: x \in (-3, 1)$

в) $x \in [1, +\infty)$

$x-1+x+3 \leq 4$

$x \leq 1$

$R_3: x = 1$

Коначно рјешење је $x \in [-3, 1]$.

## 23. За које $x \in R$ важи сљедећа неједнакост

$$|x^2-1| < 3\ ?$$

***Рјешење:***

$-3<x^2-1<3$

а) $x^2-1>-3$

$x^2+2>0$

$R_1 : \forall x \in R$

б) $x^2-1<3$

$(x-2)(x+2)<0$

$R_2 : x \in (-2,2)$

Коначно рјешење је $R=R_1 \cap R_2 \Rightarrow x \in (-2,2)$.

## 24. Ријешити систем једначина

$$\sqrt{x+3y+1} = 2$$
$$\sqrt{2x-y+2} = 7y-6\ .$$

***Рјешење:***

$$x+3y+1=4$$
$$2x-y+2=(7y-6)^2 \quad \wedge 7y-6>0 \Rightarrow y>\frac{6}{7}$$
$$x+3y=3$$
$$2x-y+2=49y^2-84y+36$$
$$x=3-3y$$
$$2(3-3y)-y+2=49y^2-84y+36$$
$$49y^2-77y+28=0$$
$$7y^2-11y+4=0$$
$$y_1=1$$
$$y_2=\frac{4}{7}\text{(Како је } \frac{4}{7}<\frac{6}{7} \quad \Rightarrow \quad y_2 \text{ није рјешење.)}$$
$$x_1=0$$
$$R:(0,1)$$

**25. Ријешити систем једначина**

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0}$$
$$\boldsymbol{x - 3y + 1 = 0}\ .$$

***Рјешење:***

$$x = 3y - 1$$
$$(3y-1)^2 + y^2 + 2(3y-1) - 9 = 0$$
$$10y^2 - 10 = 0$$
$$y^2 = 1$$
$$y_1 = 1 \wedge y_2 = -1$$
$$x_1 = 2 \wedge x_2 = -4$$

Рјешења су: (2,1) и (-4,-1).

**26. Наћи све вриједности $b \in \mathrm{R}$ за које реални бројеви $x$ и $y$ задовољавају систем једначина**

$$\boldsymbol{3x+y=b}$$
$$\boldsymbol{x+2y=2b+1}$$

**при чему је $x>3y$.**

***Рјешење:***

$$\left.\begin{aligned} -6x-2y&=-2b \\ x+2y&=2b+1 \end{aligned}\right\}+$$
$$x = -\frac{1}{5}$$
$$y = b - 3x$$
$$y = b + \frac{3}{5}$$

$$x > 3y \Rightarrow -\frac{1}{5} > 3\left(b + \frac{3}{5}\right)$$
$$-1 > 15b + 9$$
$$b < -\frac{2}{3}$$

**27. Ријешити систем једначина**

$$\boldsymbol{|x-y| = 4}$$
$$\boldsymbol{|x| + |y| = 4 \qquad (x, y \in \mathrm{R})}\ .$$

***Рјешење:***

а) $x - y \ge 0 \ \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$

$$\left.\begin{aligned} x-y&=4 \\ x+y&=4 \end{aligned}\right\}+\Rightarrow x=4,\ y=0$$
$R_1 : (4,0)$

б) $x - y \ge 0 \wedge x \ge 0 \wedge y < 0$

$$\left.\begin{aligned} x-y&=4 \\ x-y&=4 \end{aligned}\right\}$$
$\mathrm{R}_2 : \forall x, y \in \mathrm{D}_1$

$\mathrm{D}_1$ је област четвртог квадранта координатног система.

в) $x - y \ge 0 \wedge x < 0 \wedge y \ge 0$

$\mathrm{R}_3 : \varnothing$

г) $x - y \ge 0 \wedge x < 0 \wedge y < 0$

$$\left.\begin{aligned} x-y&=4 \\ -x-y&=4 \end{aligned}\right\}+\Rightarrow x=0,\ y=-4$$
$\mathrm{R}_4 : (0,-4)$

д) $x-y<0 \wedge x\geq 0 \wedge y\geq 0$

$$\left.\begin{aligned} -x+y&=4\\ x+y&=4\end{aligned}\right\} + \Rightarrow x=0,\ y=4$$

$R_5 : (0,4)$

ђ) $x-y<0 \wedge x\geq 0 \wedge y<0$

$R_6 : \varnothing$

е) $x-y<0 \wedge x<0 \wedge y\geq 0$

$$\left.\begin{aligned} -x+y&=4\\ -x+y&=4\end{aligned}\right\}$$

$R_7 : \forall x,\ y\in D_2$

$D_2$ је област другог квадранта координатног система.

ж) $x-y<0 \wedge x<0 \wedge y<0$

$$\left.\begin{aligned} -x+y&=4\\ -x-y&=4\end{aligned}\right\} + \Rightarrow x=-4,\ y=0$$

$R_8 : (-4.0)$

Укупно рјешење је: (4,0), (0,-4), (0,4), (-4.0), $\forall$ $x,y\in D_1$ , $\forall$ $x,y\in D_2$.

**28. Риjешити систем једначина**

$$\begin{aligned} y+x-1&=0\\ |y|-x-1&=0\ .\end{aligned}$$

***Рјешење:***

а) $y\geq 0$

$$\left.\begin{aligned} y+x&=1\\ y-x&=1\end{aligned}\right\} +$$

$2y=2$

$y=1$

$x=0$

б) $y<0$

$$\left.\begin{aligned} y+x&=1\\ -y-x&=1\end{aligned}\right\} +$$

$0=2$ - немогуће

Рјешење је: $x$=0, $y$=1.

**29. Риjешити систем једначина**

$$\begin{aligned} y-2x+1&=0\\ |y|-x-1&=0\ .\end{aligned}$$

***Рјешење:***

а) $y\geq 0$

$y-2x=-1$

$y-x=1 \Rightarrow y=x+1$

$x+1-2x=-1$

$x=2$

$y=3$

б) $y<0$

$y-2x=-1$

$-y-x=1$

$-3x=0$

$x=0$

$y=-1$

**30. Ријешити систем једначина**

$$|2\text{-}x| + y = 4$$
$$|x+3| + 2y = 1 \,.$$

***Рјешење:***

| | $(-\infty,-3]$ | $(-3,2]$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| 2-$x$ | + | + | - |
| $x$+3 | - | + | + |

а) $x \in (-\infty,-3]$

$$\left.\begin{aligned} 2-x+y=4 \\ -x-3+2y=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=2,\ x=0$$

Нема рјешења јер $x \notin (-\infty,-3]$

б) $x \in (-3,2]$

$$\left.\begin{aligned} 2-x+y=4 \\ x+3+2y=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=0,\ x=-2$$

в) $x \in (2,+\infty)$

$$\left.\begin{aligned} -2+x+y=4 \\ x+3+2y=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=-8,\ x=14$$

Рјешења су: (-2,0) и (14,-8).

**31. Ријешити систем једначина**

$$|3\text{-}x| + 2y = 6$$
$$|x+1| + y = 2 \,.$$

***Рјешење:***

| | $(-\infty,-1]$ | $(-1,3]$ | $(3,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| 3-$x$ | + | + | - |
| $x$+1 | - | + | + |

а) $x \in (-\infty,-1]$

$$\left.\begin{aligned} 3-x+2y=6 \\ -x-1+y=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=0,\ x=-3$$

б) $x \in (-1,3]$

$$\left.\begin{aligned} 3-x+2y=6 \\ x+1+y=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=\frac{4}{3},\ x=-\frac{1}{3}$$

в) $x \in (3,+\infty)$

$$\left.\begin{aligned} -3-x+2y=6 \\ x+1+y=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=8,\ x=-7$$

Рјешења су: (-3,0) и (-1/3,4/3).

## 32. Ријешити систем једначина

$$3x+|2y+2|=2$$
$$-x-|y-1|=0.$$

***Рјешење:***

| | -∞ | -1 | 1 |
|---|---|---|---|
| $2y+2$ | - | + | + |
| $y-1$ | - | - | + |

а)

$$y\in(-\infty,-1)$$
$$\left.\begin{array}{l}3x-(2y+2)=2\\ -x+y-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ x=6,\ \ y=7 \text{ - није рјешење}$$

б)

$$y\in(-1,1)$$
$$\left.\begin{array}{l}3x+(2y+2)=2\\ -x+y-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ x=-\frac{2}{5},\ \ y=\frac{3}{5}$$

в)

$$y\in(1,+\infty)$$
$$\left.\begin{array}{l}3x+(2y+2)=2\\ -x-(y-1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ x=-2,\ \ y=3$$

## 33. Наћи рјешења система неједначина

$$3x^2-2x-1>0 \quad (1)$$
$$x^2+x-6<0 \quad (2).$$

***Рјешење:***

Из (1) слиједи $(x-1)(x+1/3)>0$ , па је рјешење (1) $x\in(-\infty,-1/3)\cup(1,+\infty)$.
Из (2) слиједи $(x-2)(x+3)<0$ , па је рјешење (2) $x\in(-3,2)$.
Рјешење система неједначина добијамо из $[(-\infty,-1/3)\cup(1,+\infty)]\cap(-3,2)=(-3,-1/3)\cup(1,2)$.